

TEMAT: LOKATY PIENIĘŻNE.

(s.IV-8)

PRZYKŁAD 1. W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest proste. Oprocentowanie naliczane jest po każdym roku trwania lokaty.

Ile pieniędzy wypłaci bank, jeżeli lokata została założona na: rok, dwa lata, pięć lat?

Zakładamy, że przez cały okres trwania lokaty oprocentowanie nie zmieni się.

Odsetki po roku:

$$6\% \cdot 10\,000 = 0,06 \cdot 10\,000 = 600 \text{ (zł)}$$

Po roku:

$$10\,000 + 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000 + 0,06 \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 0,06) = 10\,600 \text{ (zł)}$$

W oprocentowaniu prostym odsetki po każdym roku są takie same, czyli

Po 2 latach:

$$10\,000 + 2 \cdot 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000 + 2 \cdot 0,06 \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 2 \cdot 0,06) = 11\,200 \text{ (zł)}$$

Po 5 latach:

$$10\,000 + 5 \cdot 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000 + 5 \cdot 0,06 \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 5 \cdot 0,06) = 13\,000 \text{ (zł)}$$

Procent prosty – odsetki doliczane do złożonego wkładu nie podlegają dalszemu oprocentowaniu

PRZYKŁAD 2. W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest złożone (składane). Oprocentowanie naliczane jest po każdym roku trwania lokaty.

Ile pieniędzy wypłaci bank, jeżeli lokata została założona na: rok, dwa lata, pięć lat.

Po roku:

$$10\,000 + 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000 + 0,06 \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 0,06) = 10\,600 \text{ (zł)}$$

Po drugim roku odsetki zostają doliczone do wyjściowej lokaty i kwota, od której liczony jest procent wynosi 10600 (zł):

$$10\,600 + 0,06 \cdot 10\,600 = 10\,000(1 + 0,06) + 0,06 \cdot 10\,000(1 + 0,06) = \\ = 10\,000(1 + 0,06)(1 + 0,06) = 10\,000(1 + 0,06)^2 = 11\,236 \text{ (zł)}$$

Podobnie po 5 latach:

$$10\,000(1 + 0,06)^5 \approx 13\,382 \text{ (zł)}$$

Otrzymaliśmy kwotę większą o ok. 382 zł większą niż przy oprocentowaniu prostym

Procent składany – odsetki dolicza się do lokaty i oprocentowuje w następnym okresie.

Kapitalizacja odsetek - doliczanie odsetek do lokaty.

Okres kapitalizacji – czas, po którym dolicza się odsetki

Jeżeli kapitał początkowy K złożony na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

PRZYKŁAD 3. W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest złożone. Kapitalizacja odsetek następuje co miesiąc. Ile pieniędzy wypłaci bank po wygaśnięciu lokaty, jeżeli lokata została założona na dwa lata?

Lokata: 10 000 zł

Roczna stopa procentowa: 6%

Czas: 2 lata

Kapitalizacja odsetek - co miesiąc

Co miesiąc kwota oprocentowania wzrasta o: $\frac{1}{12} \cdot 6\% = 0,5\% = 0,005$

Po pierwszym miesiącu:

$10\,000(1 + 0,005)$ (zł)

Po drugim miesiącu:

$10\,000(1 + 0,005)^2$ (zł)

Po dwudziestu czterech miesiącach:

$10\,000(1 + 0,005)^{24}$ (zł) \approx **11 272 (zł)**

PRZYKŁAD 4. W styczniu 2012 r. pani Wanda ulokowała 3000 zł w banku, w którym oprocentowanie takiej lokaty było równe 6% w stosunku rocznym. Od dopisanych odsetek trzeba było zapłacić 19% podatku. Ile pieniędzy miała Wanda z tej lokaty po roku?

Lokata: 3 000 zł

Roczna stopa procentowa: 6%

Czas: rok

Kapitalizacja odsetek - co miesiąc

Podatek od odsetek: 19%

Odsetki po roku:

$6\% \cdot 3000 = 0,06 \cdot 3000 = 180$ (zł)

Podatek od odsetek:

$19\% \cdot 180 = 0,19 \cdot 180 = 34,20 \approx 34$ (zł)

Po roku:

$3000 + (180 - 34) = 3000 + 146 =$ **3146 (zł)**

Warto wiedzieć!

Rok bankowy = 360 dni

ZADANIA

1. Ewa wpłaciła do banku 5000 zł. Ile będzie mieć pieniędzy na koncie po trzech latach przy rocznej stopie procentowej 6% i kapitalizacji kwartalnej (przy założeniu, że nie dokona w tym czasie żadnych wypłat ani wpłat).
2. Grzegorz wpłacił na roczną lokatę 4000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 6% w skali roku, ale po dziewięciu miesiącach wzrosło do 7% w skali roku. Kapitalizacja odsetek następuje co roku. Jaką kwotę miał Grzegorz na swojej lokacie po upływie roku?
3. Wpłacamy 300 zł na lokatę oprocentowaną 2% miesięcznie, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaka kwota będzie na tej lokacie po upływie roku?
4. Agata zaczęła pracować w pizzerii. Zaproponowano jej 500 zł za pierwszy miesiąc i podwyżkę o 20% po każdym miesiącu. Ile powinna zarabiać po roku?
5. Pan Jan ulokował 30 000 zł w banku z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oprocentowanie wynosi 8% w skali roku. Ile pieniędzy będzie miał pan Jan po dwóch latach?

LITERATURA:

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 2.

Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro – Warszawa 2012;

Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 2.

Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

Materiały do egzaminu

Podręcznik: **Prosto do matury**. Podręcznik do matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych. **Klasa 2**. Zakres podstawowy.

Autorzy: A. Antek, K. Belka, P. Grabowski. Wyd.: **Nowa Era**

ROZKŁAD MATERIAŁU Z MATEMATYKI SEMESTR IV

*Potęga o wykładniku wymiernym. Funkcja wykładnicza -przykłady wykresów, przesunięcia, własności.

*Logarytm- definicja, wzory i zastosowanie.

*Ciągi liczbowe (definicja, przykłady ciągów, wzory określające ciągi, obliczanie wyrazów, wykres,)

*Ciąg arytmetyczny i jego własności (definicja, własności, wzór na a_n). Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiązywanie zadań dotyczących ciągu arytmetycznego.

*Ciąg geometryczny i jego własności (definicja, własności, wzór na a_n). Suma n wyrazów ciągu geometrycznego.

*Rozwiązywanie zadań dotyczących ciągów. (z zastosowaniem wzorów na sumę)

*Procent składany. Oprocentowanie lokat i kredytów. Punkty procentowe

PRZYKŁADOWE ZADANIA

Potęgi, funkcja wykładnicza, logarytmy

1. Oblicz a) $4^{-2} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 32^{0,4}$, b) $5^{-2} \cdot 125^{\frac{2}{3}} \cdot (\frac{1}{5})^{-1}$ c) $(\frac{1}{2})^{-3} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}$

d) $\sqrt{9}(1,5^{-1} + 9^{-1,5}) - 27^{-\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt[4]{4^3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{6^6}$

2. Znajdź wzór funkcji wykładniczej $y = a^x$, jeśli jej wykres przechodzi przez punkt P

a) P = (3,27) b) P = (-1, 2)

3. Narysuj wykresy funkcji a) $y = 2^x$, b) $y = 2^{x-1}$, c) $y = 2^x + 3$, d) $y = 2^{x-1} - 3$

4. Oblicz x, gdy a) $\log_2 x = 6$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$ c) $\log_x 81 = 4$ e) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

5. Oblicz : a) $\log_2 + \log_5 0 =$ b) $\log_3 36 - \log_3 4 =$ c) $\log_2 16 - \log_2 8,$

d) $\log_6 18 + \log_6 2$ e) $\log_5 5 - \log_5 125$ f) $(-7)(\log_2 16 - \log_3 27)$

Ciągi liczbowe

1. Oblicz wyrazy $a_2, a_3, a_6, a_k, a_{k+1}$ gdy ciąg jest określony wzorem a) $a_n = 2n - 4$

b) $a_n = n^2 - 4n + 3$ c) $a_n = \frac{2n+5}{n+3}$

2. Dany jest ciąg o wyrazie $a_n = -3n + 12$ Które wyrazy są ujemne?

3. Które wyrazy ciągu określonego wzorem a) $a_n = n^2 - 6n + 8$ b) $a_n = \frac{3-n}{n+2}$ są równe zero?

4. Znajdź brakujące wyrazy ciągu arytmetycznego ($a_1, a_2, a_3, 8, 11, a_6, a_7$)

5. W ciągu arytmetycznym $a_2 = 4$ i $a_3 = 7$. Oblicz różnicę r, wyraz pierwszy oraz a_6 . Napisz wzór na n-ty wyraz.

6. W ciągu arytmetycznym $a_2 = 9$ i $a_9 = 23$. Wyznacz a_1 i r. Oblicz a_{22} . Napisz wzór na n-ty wyraz tego ciągu

7. Oblicz sumę liczb 10, 12, 14, ..., 98

8. Dla jakich wartości m liczby: a) 4, m - 5, 28 b) 2m + 3, m + 6, 3m + 15 tworzą ciąg arytmetyczny?

9. Między liczby 20 i 84 wpisz trzy liczby takie, żeby powstał ciąg arytmetyczny

10. Liczby $2x - 1, 3 - x, x^2 + x - 7$ są kolejnymi wyrazami pewnego malejącego ciągu arytmetycznego. Oblicz x, wypisz wyrazy tego ciągu.

11. Wyznacz liczby x i y wiedząc, że $x+y=8$ oraz to, że liczby x, y, 19 tworzą ciąg arytmetyczny.

12. Oblicz sumę 20 kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 4.
13. Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 7.
14. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 20 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,75 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał rowerzysta jeżeli w ciągu ostatniej godziny przejechał 17 km?
15. Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej. Jaką głębokość miała studnia, której wykopanie kosztowało 798 zł?
16. Rozwiąż równanie: a) $1 + 3 + 5 + \dots + x = 36$ b) $1 + 4 + 7 + \dots + x = 35$
17. Pan Kowalski spłacił dług w wysokości 5100 zł w dwunastu ratach, z których każda była mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Ile wynosiła pierwsza a ile ostatnia rata?
18. Liczby (2,6, 18,) tworzą ciąg geometryczny. Podaj kolejne dwa wyrazy i q. Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu.
19. Znajdź brakujące wyrazy ciągu geometrycznego ($a_1, a_2, a_3, 8, 16, a_6, a_7$)
20. Liczby a) 4, x, 25 b) $x-2, x, x+4$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x oraz iloraz q tego ciągu.
21. W ciągu geometrycznym $a_2 = 1$ i $a_3 = 2$. Oblicz q i a_1 .
22. Liczby: $m - 6, m + 3, m + 5$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz m. Oblicz te wyrazy.
23. Wyznacz x i y ciągu geometrycznego
- a) $2, x, \frac{9}{2}, y, \frac{81}{8}$ b) $x, y, 108, 324$
24. Ciąg (a_n) jest geometrycznym ciąg geometryczny jest równa 21, a ich iloczyn wynosi 216. Oblicz a_1 i q.
25. Pan Jan ulokował 30 000 zł w banku z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oprocentowanie wynosi 8% w skali roku. Ile pieniędzy będzie miał pan Jan po dwóch latach?