

MATEMATYKA Semestr czwarty

Tydzień 8

Uwaga ZIELONE to praca do przesłania

Temat lekcji 1. Suma ciągu geometrycznego - zadania

Mamy wzór , który pozwala znajdować sumę wielu wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Poróbmy zadania . Już takie były robione

Zad.1 w ciągu geometrycznym $a_1 = -3$ $q = 2$. Oblicz S_5

Zastosujemy wzór

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

I wstawimy tylko dane

$$S_5 = -3 \cdot \frac{1-2^5}{1-2} = -3 \cdot \frac{1-32}{-1} = -3 \cdot \frac{-31}{-1} = -3 \cdot 31 = -93 =$$

Zad.2 W ciągu geometrycznym $a_1 = 10$ $q = -2$ i $S_n = 430$. Oblicz n

Rozwiązanie. To jest zadanie trudniejsze sporo. Na pewno stosujemy wzór

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

I też wstawiamy dane

$$430 = 10 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \quad \text{i tu nie możemy liczyć w jednej linijce, bo}$$

otrzymaliśmy równanie. A równanie może mieć napisane tylko raz równa się.

Ale coś mamy do policzenia np. $1-(-2)=1+2=3$ czyli

$$430 = 10 \cdot \frac{1-(-2)^n}{3} \quad \text{i tu wpadamy na pomysł , żeby podzielić}$$

obie strony przez 10 (a nie wolno przenieść bo mamy mnożenie 10 razy)i wtedy

$$430:10=43 \quad \text{i} \quad 10:10=1$$

$$43 = \frac{1-(-2)^n}{3} \quad \text{tu trzeba pozbyć się ułamka najlepiej na krzyż(}$$

albo inaczej , mądrzej)

$$\frac{43}{1} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

$1 - (-2)^n = 129$ liczba 1 przechodzi na prawo z przeciwnym znakiem

$$-(-2)^n = 129 - 1$$

$-(-2)^n = 128$ kasujemy pierwszy minus mnożąc obie strony przez (-1)

$$(-2)^n = -128$$

I teraz trudna sprawa, bo musimy zgadnąć ile wynosi n . Najpierw ustalamy że n musi być liczbą nieparzystą, bo minus tylko w nieparzystej potęgę daje minus. Dla ułatwienia podam potęgi liczby 2

$$2^4 = 16, 2^6 = 64, \quad 2^7 = 128, \quad 2^9 = 256$$

No to widać, że $n=7$. Znaleźliśmy n , ale było to trudne.

Zrób to sama/sam

Zad.3 W ciągu geometrycznym $a_1 = 3$ $q = -1$. Oblicz sumę piętnastu wyrazów

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

I co dalej? Łatwe

Temat lekcji 2. Ciąg geometryczny - zadania

Zad.4 Napisz wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego jeśli

a) $a_1 = 10$ $q = 2$

Wzór ogólny to $a_n = a_1 q^{n-1}$ wystarczy wstawić a_1 i q , to mamy

$$a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$$

b) $a_1 = 8$, $a_2 = 32$

Tu też zastosujemy wzór na a_n czyli

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Ale nie mamy q . No musimy policzyć. A q to wynik dzielenia dowolnego wyrazu przez poprzedni czyli drugiego przez pierwszy, a to mamy

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{32}{8} = 4 \quad \text{czyli } q=4. \quad \text{No i wszystko co trzeba mamy}$$

$$a_n = 8 \cdot 4^{n-1}$$

A to jednak można zapisać prościej zamieniając 8 i 4 na potęgi o podstawie 2

$$a_n = 2^3 \cdot (2^2)^{n-1} \quad \text{potęgując potęgę mnożymy wykładniki}$$

$$a_n = 2^3 \cdot 2^{2n-2} \quad \text{mnożąc potęgi dodajemy wykładnik}$$

$$a_n = 2^{2n+1}$$

Zrób to sama/sam

A to przykład do powtórzenia., taki jak przykład b) ale krótszy bez przekształcania (tylko pięć linijek)

$$c) \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 12$$

Zad.5 zabawa Między dane liczby wpisz liczbę dodatnią, żeby tworzyły ciąg geometryczny

$$a) \quad 3, _, 27$$

$$b) \quad 3, _, 12$$

$$c) \quad \sqrt{2}, _, 4\sqrt{2}$$

Temat lekcji 3. Ciągu geometryczny - zadania

Zad.6 Znajdź x , żeby dane liczby tworzyły ciąg geometryczny

Tu będziemy korzystali ze wzoru

$$a, b, c \text{ tworzą ciąg geometryczny, jeśli } \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

$$a) \quad x-5, 4, 8$$

ostatni wyraz do **środkowego** ma się tak **jak** **środkowy** do **pierwszego**

$$\text{czyli } \frac{8}{4} = \frac{4}{x-5}$$

mnożymy na krzyż

$$8(x-5) = 4 \cdot 4$$

$$8x - 40 = 16$$

$$8x = 16 - 40$$

$$8x = -24$$

$$x = -3$$

Więc szukany x to liczba -3

$$b) \quad 4, x, 9$$

ostatni wyraz do **środkowego** ma się tak **jak** **środkowy** do **pierwszego**

$$\text{czyli } \frac{9}{x} = \frac{x}{4}$$

mnożymy na krzyż

$$x^2 = 9 \cdot 4$$

$$x^2 = 36$$

No i tu jest problem, którego nie widzicie. Łatwo zgadnąć, że $x=6$, ale to za mało!!!!!!

Bo jest jeszcze DRUGA liczba, która spełnia ten warunek Taką liczbą jest liczba przeciwna do 6 czyli -6 , $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

I tu będą DWA ikсы DOBRE $x=6$ oraz $x=-6$ A to oznacza, że tu mamy DWA ciągi geometryczne spełniające warunki zadania

$$4, 6, 9 \text{ i tu iloraz } q=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \quad \text{oraz } 4, -6, 9 \text{ a tu iloraz } q=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

c) $1, x, 16$

ostatni wyraz do **środkowego** ma się tak **jak środkowy** do **pierwszego**

$$\text{czyli } \frac{16}{x} = \frac{x}{1} \quad \text{mnożymy na krzyż}$$

$$x^2 = 16 \cdot 1$$

$$x^2 = 16$$

No i tu jest problem a poprzedniego przykładu. Łatwo zgadujesz, że $x=4$ ale to za mało!!!!!!

Bo jest jeszcze DRUGA liczba, która spełnia ten warunek Taką liczbą jest liczba przeciwna do 4 czyli -4 , $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

Więc mamy DWA ikсы DOBRE to

$$x=4 \text{ oraz } x=-4$$

A to oznacza, że tu mamy DWA ciągi geometryczne spełniające warunki zadania

$$1, 4, 16 \text{ i tu iloraz } q=4 \text{ bo } \frac{16}{4}=4 \quad \text{oraz } 1, -4, 16 \text{ a tu iloraz } q=-4 \text{ bo } q=\frac{16}{-4}=-4$$

Zrób to sama/sam

A to przykład do powtórzenia.

d) $1, x, 9$

e) $x-3, x+1, 4x-2$

To będzie trudniejsze i dłuższe. Najpierw ja wcześniej piszemy proporcję czy wykorzystujemy wcześniejszy wzór

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{x+1}{x-3} \quad \text{mnożę na krzyż}$$

$$(4x-2)(x-3) = (x+1)(x+1) \quad \text{mnożę nawiasy}$$

$$4x^2 - 12x - 2x + 6 = x^2 + 1x + 1x + 1 \quad \text{redukuję wyrazy podobne}$$

$$4x^2 - 14x + 6 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{to jest równanie kwadratowe więc}$$

wszystko na lewą stronę

$$4x^2 - x^2 - 14x - 2x + 6 - 1 = 0 \quad \text{dalej liczę}$$

$$3x^2 - 16x + 5 = 0$$

Mamy równanie kwadratowe w poprawnej postaci czyli uporządkowane i zero po prawej stronie. To wypisujemy współczynniki a, b, c i liczymy deltę

$$a=3 \quad b= -16 \quad c=5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 256 - 60 = 196, \sqrt{\Delta} = 14$$

Teraz liczymy dwa ikсы, bo delta jest liczbą dodatnią, ze znanych wzorów

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 - 14}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 + 14}{2 \cdot 3} = \frac{30}{6} = 5$$

Otrzymaliśmy, że $x = \frac{1}{3}$ oraz $x = 5$. A to oznacza, że są dwa ciągi spełniające warunki zadania. Ale w poleceniu należało znaleźć x, to mamy i koniec zadania

Teraz połączmy ciąg geometryczny z arytmetycznym i wykorzystamy dwa wzory

1. a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny jeśli $b = \frac{a+c}{2}$
2. a, b, c tworzą ciąg geometryczny, jeśli $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

Zad8. Dany jest ciąg 2, x, 18, y. Znajdź takie liczby x i y dodatnie, ale żeby 2, x, 18 tworzyły ciąg geometryczny, a liczby x, 18, y ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie . Ponieważ chyba to nie jest trudne, to proponuję samodzielne rozwiązanie ze wskazówkami niżej

2, x, 18, ciąg geometryczny to zgadnij jaka liczba powinna być iksem???

Albo zastosuj wzór $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

I dalszy ciąg do zrobienia

Jak już masz x=_____, to wpisz ją do ciągu _____, 18, y i łatwo zgadniesz y

Zad.2 W ciągu geometrycznym $a_1 = 3$ $q = -1$. Oblicz sumę piętnastu wyrazów

Zad.3 Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego jeśli $a_1 = 3$, $a_2 = 12$

Zad.4 Znajdź x, żeby dane liczby tworzyły ciąg geometryczny 1, x, 9