

Dn. 24,25 października 2020 ZJAZD V

Nauczyciel Grażyna Putkiewicz telefon 603071595

Adres mailowy grazyna-putkiewicz@wp.pl

Lekcja 1 Temat FUNKCJA WYKŁADNICZA

(

Funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$ nazywamy **funkcją wykładniczą** o podstawie a .

Przykłady; $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.

Zadanie z matury

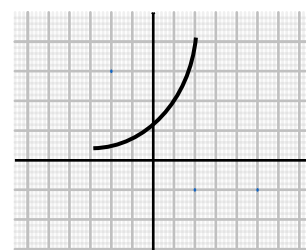
Znajdź wzór funkcji wykładniczej, jeżeli jej wykres przechodzi przez punkt $P = (2, 9)$

Rozwiązanie : funkcja wykładnicza ma wzór ogólny $f(x) = a^x$ i znaleźć jej wzór oznacza znaleźć, jakie jest a . Mamy współrzędne punktu czyli mamy x i y oraz pamiętamy, że y to to samo co $f(x)$ czyli postawiamy $x=2$ i $f(x)=9$

$9 = a^2$ i tu zgadujemy, że $a=3$ (tyko liczba dodatnia) i wzór funkcji to
$$f(x) = 3^x$$

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^x$ i opisz jej własności. Robimy tabelkę

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	3	4



1° Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in R$).

2° Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich (wykresy są położone w I i II ćwiartce).

3° Oś x jest asymptotą wykresu.

4° Krzywa wykładnicza przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.

5° Funkcja nie ma miejsc zerowych.

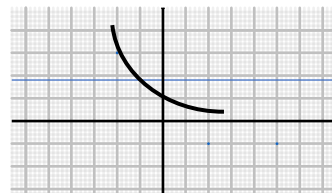
6° Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej i nie przyjmuje wartości największej.

7° Funkcja jest rosnąca.

8° Równanie $2^x = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m > 0$

1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i opisz jej własności. (też tabelka)

(rysunek obok)



1° Dziedziną funkcji jest

2° Zbiorem wartości jest

3° Asymptotą wykresu jest

4° Krzywa wykładnicza przecina oś y w punkcie

5° Miejsca zerowe:

6° wartość najmniejsza wartość największa.....

7° Monotoniczność funkcji:

8° Rozwiązaniem równania $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ (liczbę 2 obrazuje niebieska linia jako wykres funkcji stałej

$y=2$) jest liczba $x=.....$

Każdą funkcję można przekształcić przy pomocy odbić i przesunięć. Należy umieć odczytać z zapisu funkcji jakiego jest ukryte przekształcenie. Przykłady

a) $y = 3^{x+1} - 2$ tu trzeba przekształcić wykres funkcji $y = 3^x$ przez przesunięcie o 1 jednostkę w LEWO i 2 jednostki(kratki) w dół

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 5$ tu trzeba przekształcić wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ przez przesunięcie o 4 jednostki w LEWO i 5 jednostki w górę

c) $y = 4^{x-8} + 1$ a co tu????

d) $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$, $y = 5^{-x}$ każda z tych ma minus przed x, to oznacza przekształcenie wykresu funkcji bez minusa przed x symetrycznie względem osi y (osi igrek) czyli odbicie lustrzane względem tej osi

e) $y = -2^x$, $y = -3^x$, $y = -5^x$ każda z tych ma minus przed całą funkcją , to oznacza przekształcenie wykresu funkcji bez minusa symetrycznie względem osi x (osi iksów) czyli odbicie lustrzane względem tej osi

Lekcja 2 Temat konsultacji: Logarytm i jego własności

Definicja logarytmu

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

a – podstawa logarytmu **liczba dodatnia** różna od 1

b – liczba logarytmowana, zawsze **liczba dodatnia**

c – (logarytm przy podstawie a liczby b) wynik logarytmowania

Przykłady zapisu logarytmu

$$\log_2 8, \quad \log_5 84, \quad \log_2 \frac{1}{16}, \quad \log_{27} 9, \quad \log 100$$

logarytm, który nie ma podstawy nazywa się logarytmem dziesiętnym

*Logarytm przy podstawie 10 (i takiej podstawy się nie pisze zgodnie z umową na całym świecie) nazywamy **logarytmem dziesiętnym**. Logarytm dziesiętny liczby b oznaczamy **log b***

Własności logarytmu podstawowe:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^r = r$$

1. Ćwiczenia definicji. Oblicz logarytm

a) $\log_2 8 = 3$ bo $2^3 = 8$

szukamy tu takiej liczby do której trzeba podnieść podstawę 2, żeby wyszła liczba logarytmowana 8

b) $\log_2 2 = 1$ bo $2^1 = 2$

c) $\log_2 32 = 5$ (2 do której daje liczbę 32) bo $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 4 = 32$

d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ (2 do której daje liczbę $\frac{1}{4}$) bo $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

e) $\log_3 9 = 2$ bo $3^2 = 9$

f) $\log_4 64 = 3$ bo $4^3 = 64$

g) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ bo $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$$h) \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \quad \text{bo} \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$i) \log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2} \quad \text{bo} \quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

$$j) \log 100 = (\text{logarytm dziesiętny}) = \log_{10} 100 = 2 \quad \text{bo} \quad 10^2 = 100$$

$$k) \log 1 = \log_{10} 1 = 0 \quad \text{bo} \quad 10^0 = 1$$

$$l) \log_{0,1} 0,01 = 2 \quad \text{bo} \quad 0,1^2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$$

Zadanie 1 do samodzielnego liczenia (łatwe)

- | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|----|
| a. $\log_3 27$ | b. $\log_2 4$ | c. $\log 10$ | d. $\log_5 5$ | e. |
| $\log_2 64$ | f. $\log_3 81$ | g. $\log_4 16$ | h. $\log_5 125$ | |
| i. $\log_7 49$ | j. $\log_8 64$ | | | |
| k. $\log_4 1$ | l. $\log 1000$ | | | |

Zadanie 2 do samodzielnego liczenia (trudniejsze pamiętaj,

że **ujemny wykładnik** odwraca podstawę)

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| a. $\log_{\frac{1}{6}} 6$ | b. $\log_{\frac{1}{2}} 4$ | c. $\log_{\frac{1}{5}} 125$ | d. $\log_{\frac{1}{3}} 9$ |
| e. $\log_2 \frac{1}{32}$ | f. $\log_3 \frac{1}{81}$ | g. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ | |

Zadanie 3 Oblicz x, jeżeli:

- a. $\log_3 x = -1$ to $3^{-1} = x$ czyli $x = \frac{1}{3}$
- b. $\log_5 x = 3$ to $5^3 = x$ czyli $x = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- c. $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$
- d. $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$
- e. $\log_4 x = 10$ to $4^{10} = x$ czyli $x = 4^{10}$ tak zostawiamy

f. $\log_3 x = -1$

Własności logarytmów – wzory konieczne (logarytmy mają taką samą podstawę!!!)

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

(przy dodawaniu logarytmów mnożymy liczby logarytmowane)

2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$

(przy odejmowaniu logarytmów dzielimy liczby logarytmowane)

3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

logarytmując potęgę wyrzucamy wykładnik potęgi przed logarytm z działaniem mnożenia

albo mnożąc logarytm przez liczbę wrzucamy liczbę jako wykładni liczby logarytmowanej

Przykłady

a. $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = 2$ bo $6^2 = 36$

b. $\log_3 4,5 + \log_3 6 = \log_3 (4,5 \cdot 6) = \log_3 27 = 3$ bo $3^3 = 27$

c. $\log 2 + \log 5$

d. $\log_5 100 - \log_5 4 =$ (tu odejmowanie logarytmów to dzielimy liczby logarytmowane przepisując logarytm) $= \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2$

e. $\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4$

dalej samodzielnie

f. $\log_3 54 + \log_3 \frac{1}{2}$

g. $\log_3 18 - \log_3 2$

h. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

i. $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$

j. $\log_3 9^6$ (tu mamy wzór 3, który mówi, że wykładnik potęgi możemy wyrzucić przed logarytm z mnożeniem, więc 6 wyskakuje przed logarytm) = $6 \cdot \log_3 9 = 6 \cdot 2 = 12$ bo $\log_3 9 = 2$

k. $\log 10^{16}$

l. $\log_7 7^{53}$

A tu trochę trudniejszy deserek

$\log_2 \log_4 16$

(Najpierw trzeba obliczyć drugi logarytm czyli $\log_4 16 = 2$ i teraz liczyć $\log_2 2$)

$$\log_2 \log_4 16 = \log_2 2 = 1$$

A tu powtarzamy poprzedni przykład

$$m. \log_2 \log_5 25 =$$

Zadanie 4 Oblicz:

a. $2 \log_2 5 - \log_2 75 + \log_2 6$ tu mamy do wykonania wszystkie działania na logarytmach i trzeba pamiętać o kolejności działań, mamy dodawanie, odejmowanie i mnożenie. TRZEBA pamiętać, że pierwsze będzie MNOŻENIE potem dodawanie i odejmowanie w KOLEJNOŚCI ZAPISU czyli najpierw odejmowanie potem dodawanie

$$\begin{aligned} &= \log_2 5^2 - \log_2 75 + \log_2 6 = \\ &= \log_2 25 - \log_2 75 + \log_2 6 = \\ &= \log_2 \frac{25}{75} + \log_2 6 = \end{aligned}$$

Teraz mnożę liczby logarytmowanie i przepisuję logarytm

$$\log_2 \frac{25}{75} \cdot 6 = \log_2 \frac{25}{75} \cdot \frac{6}{1} = \log_2 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$$

Skróciliśmy 25 z 75 przez 25, wyszła jedna trzecia

b. $3 \log_4 2 + \log_4 5 - \log_4 10 =$

ten przykład zrób samodzielnie

Na maturę przydają się też takie zdania , w których logarytm wyraża się za pomocą pewnych liter i wykorzystuje się wzory na logarytm mnożenia bądź logarytm dzielenia

Zadanie5. Zapisz $\log_2 18$ za pomocą litery a , która zastępuje inny logarytm tu $\log_2 3 = a$

Rozwiązanie

Liczba 18 daje się zapisać tak $18=3 \cdot 6$ i $6=3 \cdot 2$

$$\begin{aligned} \text{Więc } \log_2 18 &= \log_2 (3 \cdot 6) = \log_2 3 + \log_2 6 = \\ &= \log_2 3 + \log_2 (3 \cdot 2) = \log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 2 = \end{aligned}$$

I litera a zastępuje dwa pierwsze logarytmy i ostatni się liczy

$$=a + a + 1 = 2a + 1$$

Zadanie6. Zapisz $\log_2 20$ za pomocą litery a , jeśli $\log_2 5 = a$

Liczba 20 daje się zapisać tak $20=5 \cdot 4$ i

$$\begin{aligned} \text{Więc } \log_2 20 &= \log_2 (5 \cdot 4) = \log_2 5 + \log_2 4 = \\ &= \log_2 5 + 2 = a + 2 = \end{aligned}$$

I litera a zastępuje pierwszy logarytm i ostatni się liczy

Zadanie 6. Zapisz $\log_2 100$ za pomocą $\log_2 5 = a$

Wskazówka: $100 = 25 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 4$

Lekcja 3 i 4 Temat CIĄGI LICZBOWE. Ciąg arytmetyczny

Przykłady ciągów

- a) lista w dzienniku - każde nazwisko ma określony numer na liście
- b) kolejka do kasy - każdy ma wyznaczoną pozycję w kolejce
- c) 1, 7, 8, 3, 12, 20 i to jest ciąg liczbowy czyli kolejka liczb. Każda liczba ma określone miejsce w tej kolejce
- d) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ciąg utworzony przez liczby parzyste

Ciągi liczbowe określamy w różny sposób. tu mamy przykłady ciągów w których wymienione są wyrazy ciągów, bo

CIĄGI SKŁADAJĄ SIĘ Z WYRAZÓW.

A WYRAZY CIĄGU MAJĄ NUMERY. Może być wyraz pierwszy, wyraz ósmy, wyraz trzeci, itp

Należy pamiętać:

1. Ciągi składają się z liczb oddzielanych przecinkami
2. Ważne jest miejsce liczby w ciągu
3. Te liczby nazywamy WYRAZAMI ciągu
4. Każdy wyraz ma NUMER
5. NUMERY są tylko liczbami NATURALNYMI (bez zera, ułamków, liczb ujemnych)
6. Ciągi określamy za pomocą wzoru na n -ty (enty) wyraz

Definicja ciągu

Ciąg liczbowy to funkcja określona na zbiorze dodatnich liczb naturalnych

Każdy ciąg składa się z **wyrazów**, a wyrazy mają **numery**, które są liczbami naturalnymi 1,2,3,4,5,6,....

Pamiętaj !!! **Nie ma wyrazu o numerze zero ani o numerze ujemnym!!!!**

Wyrazy ciągu oznaczamy małymi literami z numerkiem np. a_1 , b_1 , a_5 , a_8

a_1 czytamy: wyraz pierwszy (a jeden)

a_2 czytamy: wyraz drugi (a dwa)

a_n czytamy: wyraz n-ty (a en)

Ciągi określamy za pomocą **wzoru na n-ty wyraz** np.;

$$a_n = 4n - 1, \quad a_n = \frac{n+12}{2n+7}, \quad a_n = n^2 + 9n - 7$$

Wzory te pozwalają obliczyć i znaleźć wszystkie wyrazy ciągu. Trzeba w miejsce litery **n** wstawić dany **numer wyrazu**

Zad.1 Oblicz pierwszy wyraz, drugi wyraz, trzeci wyraz, ósmy wyraz oraz wyraz o numerze $k+1$ ciągu określonego wzorem

$$a_n = n^2 + 6n - 4$$

Rozwiązanie

Liczę wyraz pierwszy

$$a_1 = 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 1 + 6 - 4 = 3$$

Liczę wyraz drugi

$$a_2 = 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 4 + 12 - 4 = 12$$

Liczę wyraz trzeci

$$a_3 = 3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 9 + 18 - 4 = 23$$

Tylko dla orłów!!! Liczę wyraz k plus pierwszy czyli $k + 1$
(tylko dla orłów)

$$a_{k+1} = (k + 1)^2 + 6 \cdot (k + 1) - 4 = k^2 + 2k + 1 + 6k + 6 - 4 \\ = k^2 + 8k + 3$$

Zad.2 . Oblicz samodzielnie pierwszy wyraz (a_1), drugi wyraz (a_2),,, trzeci wyraz, (a_3),,, ósmy wyraz oraz wyraz dwudziesty (a_{20}) ciągu określonego wzorem $a_n = 3 - 4n$.

Zrób to samo dla ciągu $a_n = \frac{n+12}{2n+7}$

Zad.3 Który wyraz ciągu określonego wzorem $a_n = 1 + 5n$ jest równy 26?

Rozwiązanie

Który wyraz ciągu znaczy , jaki jest numer tego wyrazu , który jest równy 26. Musimy więc znaleźć n dla którego a_n jest równy 26 czyli zapisujemy równanie:

$$a_n = 26 \text{ i wstawiamy wzór na wyraz}$$

$$1 + 5n = 26 \quad \text{i wyliczamy } n$$

$$5n = 26 - 1$$

$$5n = 25 \text{ } /:5$$

$$n = 5 \quad \text{czyli wyraz piąty ma wartość}$$

równą 26

odp. $a_5 = 26$

Zad.4 Który wyraz ciągu określonego wzorem $a_n = n^2 - 10n + 9$ jest równy zero?

Rozwiązanie .

Który wyraz ciągu oznacza - jaki jest numer tego wyrazu , który jest równy 0.

Musimy więc znaleźć n dla którego a_n jest równy 0 czyli zapisujemy równanie

$$a_n = 0 \text{ i wstawiamy wzór na wyraz } a_n$$

$$n^2 - 10n + 9 = 0$$

i wyliczamy n rozwiązując równanie kwadratowe z niewiadomą n

Współczynniki: $a=1, b=-10, c=9$
liczymy deltę $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 \text{ to } \sqrt{\Delta} = 8$$

Liczymy n_1 i n_2 ze wzorów $n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$n_1 = \frac{10-8}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{i} \quad n_2 = \frac{10+8}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9$$

Więc znaleźliśmy dwie wartości n czyli dwa numery wyrazów to znaczy, że $n=1$ lub $n=9$ czyli mamy numery wyrazów, które są równe zero - jest to wyraz pierwszy i wyraz dziewiąty.

Zatem $a_1 = 0$ oraz $a_9 = 0$

Zad.5 Czy liczba 4 jest wyrazem ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n-5}{n+2}$?

Rozwiązanie

Szukamy takiej wartości n , dla której $a_n = 4$.

Wstawiamy w miejsce a_n wzór podany i piszemy równanie

$$\frac{2n-5}{n+2} = 4 \quad \text{tu dla ułatwienia możemy wpisać } 4 = \frac{4}{1}$$

i mamy

$$\frac{2n-5}{n+2} = \frac{4}{1} \quad \text{mnożymy na krzyż}$$

$$(2n - 5) \cdot 1 = 4 \cdot (n+2) \quad \text{wymnażamy nawiasy}$$

$$2n - 5 = 4n + 8$$

$$2n - 4n = 8 + 5$$

$$-2n = 13 \quad /: (-2)$$

$$n = -\frac{13}{2} = -6,5$$

ta otrzymana liczba $-6,5$ nie jest liczbą naturalną(naturalna nie ma minusa ani ułamka) , więc **żaden** wyraz nie jest równy 4

Zad.6. Ile wyrazów ciągu $a_n = 3n - 17$ jest ujemnych?

Rozwiązania :

Wyrazy mają być ujemne czyli mniejsze od zera, co zapiszemy

$$a_n < 0$$

$$3n - 17 < 0$$

$$3n < 17$$

$$n < \frac{17}{3}$$

$$n < 5\frac{2}{3} \text{ i to czytamy: szukane numery są}$$

liczbami naturalnym mniejszymi niż $5\frac{2}{3}$ czyli są to liczby

1,2,3,4,5 oznaczające numery wyrazów. **Zatem pięć wyrazów jest ujemnych** . Może być też inny sposób rozwiązania tego zadania, łatwiejszy. Liczymy po kolei wyrazy:

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 17 = 3 - 17 = -14 ,$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 17 = 6 - 17 = -11 ,$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 17 = 9 - 17 = -6 ,$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 - 17 = 12 - 17 = -5 ,$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 - 17 = 15 - 17 = -2 ,$$

$a_6 = 3 \cdot 6 - 17 = 18 - 17 = 1$ i ta liczba już jest dodatnia. Więc liczymy palcem , ile było liczb ujemnych. Ile , policz samodzielnie

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny ma pewną własność, którą teraz przypomnimy.
Jest to stała różnica między dowolnym wyrazem a poprzednim

Rozpatrzmy ciągi

a) 2,5,8,11,14,

Łatwo zauważyć, jakie będą kolejne liczby, bo każda następna jest o 3 większa od poprzedniej. I jest ciąg arytmetyczny o

różnicy $r = 3$ bo $3 = 14 - 11 = 11 - 8 = 8 - 5 = 5 - 1$

b) 20,16,12,8, JAKIE BĘDĄ LICZBY NASTĘPNE? Wpisz i określ jaka będzie różnica r (ta różnica jest liczbą ujemną)

Różnica r jest różnicą między dowolnym wyrazem a poprzednim czyli

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots$$

Różnica r może być liczbą dodatnią i ujemną

Definicja ciągu arytmetycznego

Ciąg liczbowy, w którym różnica między dowolnym wyrazem a wyrazem poprzednim jest stała nazywamy ciągiem arytmetycznym. Każdy kolejny wyraz ciągu arytmetycznego powstaje z wyrazu poprzedniego przez dodanie stałej liczby, którą nazywamy różnicą ciągu

Sprawdź, czy ciąg dany jest arytmetyczny: a) (2,7,12,17,...)

b) (40, 36, 32, 20, 16, 12)

Wyrazy ciągu arytmetycznego zależą od wyrazu pierwszego i różnicy r . i są określone wzorem

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Oblicz ze wzoru powyższego wyrazy drugi, piąty, ósmy jeśli $a_1 = 7$ i $r = 5$

$$a_2 = 7 + (2 - 1)5 = 7 + 1 \cdot 5 = 7 + 5 = 12$$

$a_5 = 7 + (5 - 1) \cdot 5 = 7 + 4 \cdot 5 = 7 + 20 = 27$ Pamiętaj, najpierw liczymy w nawiasie

Z wzoru ogólnego wynikają następujące wzory, które należy pamiętać:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 + r, & a_3 &= a_1 + 2r, & a_4 &= a_2 + 2r, \\
 a_{15} &= a_{12} + 3r, & a_{12} &= a_5 + 7r \\
 a_1 &= a_5 - 4r & a_1 &= a_7 - 6r, & a_1 &= a_5 - 4r, \\
 a_1 &= a_{10} - 9r
 \end{aligned}$$

Zwróć uwagę na to, co widzisz po zakryciu *liter*

Zad.1 WAZNE(tu stosujemy wzory szczegółowe) Znajdź różnicę i wyraz pierwszy ciągu arytmetycznego, gdy $a_5 = 3$ i $a_{12} = 38$

Rozwiązanie. Piszemy zależność między danymi wyrazami i różnicą

$$a_{12} = a_5 + 7r$$

Wstawiamy dane

$$38 = 3 + 7r$$

Zamieniamy stronami

$$3 + 7r = 38$$

$$7r = 38 - 3$$

$$7r = 35/:7$$

$$r = 5$$

Teraz tworzymy wzór na obliczenie wyrazu pierwszego

$$a_1 = a_5 - 4r$$

$$a_1 = 3 - 4 \cdot 5 = 3 - 20 = -17$$

Odp. $r=5$ i $a_1 = -17$

Zad.2 Znajdź różnicę i wyraz pierwszy ciągu arytmetycznego, gdy

$$a_4 = 5 \text{ i } a_{10} = 29$$

Zad.3 Znajdź różnicę i wyraz pierwszy ciągu arytmetycznego, gdy

$a_3 = 3$ i $a_7 = 23$. Oblicz też wyraz piętnasty (np. pisząc wzór $a_{15} = a_7 + 8r$)

Ważna w rozwiązywaniu niektórych zadań jest zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego poza pierwszym

jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich

Np. (2,5, 8, 11, 14) To $5 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2}, \quad \frac{8+14}{2} = \frac{22}{2} = 11$

Jeśli ciąg jest trzywyrazowy , to własność tę można zapisać następująco:

Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny , to $b = \frac{a+c}{2}$

Przykład Liczby $x-4, x+5, 2x-4$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x

Rozwiązanie Tu zastosujemy ten powyższy wzór $b = \frac{a+c}{2}$

Wyraz środkowy $x+5$ jest średnią arytmetyczną pozostałych czyli

$$x + 5 = \frac{x-4+2x-4}{2}$$

Rozwiązujemy powstałe równanie

$$x + 5 = \frac{3x-8}{2}$$

które zapisujemy w postaci

$$\frac{x+5}{1} = \frac{3x-8}{2} \quad \text{i mnożymy na krzyż}$$
$$2x + 10 = 3x - 8$$

$$2x - 3x = -8 - 10$$

$$-x = -18$$

$$x = 18 \text{ to szukany } x$$

Zadanie. Wiedząc, że dane wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny oblicz x :

a) 4, $x+6$, $3x-2$

b) $3x+2$, $x+1$, $x-12$

Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego

Jeśli liczby tworzą ciąg arytmetyczny, to chcąc je dodać do siebie stosujemy wzór

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

gdzie a_1 to pierwsza dodawana liczba,

a_n to ostatnia dodawana liczba

n to numer ostatniej liczby (wyrazu) i liczba dodawanych wyrazów (liczb)

Zad. 1 Znajdź sumę dwustu liczb naturalnych $1+2+3+4+\dots$

Rozwiązanie. Zauważamy, że te liczby tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r=1$ więc dodajemy je za pomocą poznanego wzoru

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

gdzie podstawimy za n liczbę 200, bo trzeba tyle liczb dodać, natomiast $a_n = a_{200}$ i jest to ostatnia z dodawanych liczb czyli 200 a wyraz pierwszy to 1. Zatem

$$S_{200} = \frac{(1 + 200) \cdot 200}{2} = \frac{201 \cdot 200}{2} = 201 \cdot 100 = 20100$$

Zad.2 Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6.

Rozwiązanie Wypiszmy trochę liczb wynikających z warunków zadania. Są to: 12, 18, 24, 30,

Ostatnia z nich to 96. Zauważamy, że kolejne liczby są o 6 większe od poprzedniej czyli jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $r=6$.

Zatem dodajemy je za pomocą wzoru $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Mamy tu $a_1 = 12$, $a_n = 96$. Nie znamy jednak, ile jest tych liczb czyli nie znamy n (oczywiście można je wszystkie wypisać i po kolei policzyć, ale...). W tym celu wykorzystamy wzór ogólny

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

i podstawimy dane liczby:

$$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$$

Stąd wyliczymy n czyli liczbę tych liczb, które są podzielne przez 6 i są dwucyfrowe

$$96 = 12 + 6n - 6$$

$$96 = 6 + 6n$$

$$6n + 6 = 96$$

$$6n = 96 - 6$$

$$6n = 90 / : 6$$

$$n = 15$$

a to znaczy, że mamy dodać 15 liczb czyli $n=15$, więc wracamy do wzoru na S_n (pamiętaj, najpierw liczy się w nawiasie) czyli

$$S_{15} = \frac{(12 + 96) \cdot 15}{2} = \frac{108 \cdot 15}{2} = 54 \cdot 15 = 810$$

Zad.3 Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych, które przydzieleniu przez 6 dają resztę 3

Odp. do zad $a_1=15$, $a_n=99$, $S_n=S_{15}=895$

Zad.4 TRUDNIEJSZE (bywa na maturze) Oblicz wyraz a_5 ciągu arytmetycznego, jeśli suma jego n wyrazów wyraża się

wzorem $S_n = n^2 + 3n$

Rozwiązanie Zastanówmy się, co oznacza symbol S_3 , S_5 , S_1 . Są to sumy tylu wyrazów, licząc od wyrazu pierwszego, ile wynosi numerek przy literze S czyli

$$\begin{aligned} S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_1 &= a_1 \end{aligned}$$

Można zauważyć, że np. $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_3 + a_4 + a_5$

Albo $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$

bo $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = S_7 + a_8$$

Do obliczenia a_5 wykorzystamy więc zależność $S_5 = S_4 + a_5$
(albo $S_5 - S_4 = a_5$)

Najpierw policzymy ze wzoru $S_n = n^2 + 3n$ danego w treści zadania S_5 i S_4

$$S_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40$$

$$S_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 = 16 + 12 = 28$$

I podstawimy do $S_5 = S_4 + a_5$

Czyli $40 = 28 + a_5$ *to*

$$28 + a_5 = 40$$

$$a_5 = 40 - 28$$

$$a_5 = 12$$

Zadania do ćwiczeń dla osób ambitnych

1. Dla jakich wartości x liczby $3x+1$, $2x-4$, $5x+3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
2. Dla jakich wartości x liczby $x+4$, $4x$, x^2+8 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? (I tu będzie okazja do rozwiązania równania kwadratowe)
3. Oblicz wyrazy x , y i z ciągu arytmetycznego: 215, x , y , z , -11. Dla jakich wartości x liczby $3x+1$, $2x-4$, $5x+3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wskazówka: mamy dany wyraz pierwszy i ostatni -11 czyli który? I wzór $a_5 = a_1 + 4r$. Bo przydałaby się różnica r , która jest ujemna. I prościutkie dalej.
4. Drugi, szósty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego wynoszą odpowiednio 2, 22, 222. Znajdź pierwszy wyraz i liczbę wyrazów tego ciągu. Wskazówka: zadanie podobne do poprzedniego
5. Wyznacz ciąg arytmetyczny czyli policz a_1 i r wiedząc, że suma wyrazu czwartego i siódmego jest równa 86, a suma wyrazów drugiego i trzynastego jest równa 22. Wskazówka. Zadanie trudniejsze, wymaga napisania układu równań i zastosowaniu wzorów

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$a_2 = a_1 + 1r$$

$$a_{13} = a_1 + 12r$$

w układzie równań

$$\begin{cases} a_4 + a_7 = 86 \\ a_2 + a_{13} = 22 \end{cases}$$

Dalej dla kogoś, kto umie rozwiązać układ równań dość łatwe

6. Wyznacz ciąg arytmetyczny (oblicz a_1 i r z układu równań) wiedząc, że suma wyrazu trzeciego i siódmego jest równa (-10) , a suma wyrazów czwartego i dziewiątego jest równa (-22) . Wskazówka Rozwiązuj jak poprzednie zadanie

TEST SPRAWDZAJĄCY

1. Dany jest ciąg: $\{2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots\}$. Pięćdziesiąty wyraz tego ciągu jest równy
A. -23 B. -24 C. -25 D. -26
2. Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{1}{n+1}$. Zatem:
A. $a_3 = 0,25$ B. $a_3 = 0,5$ C. $a_3 = 1$ D. $a_3 = 3$
3. Jeżeli $a_1 = 1$, $r = 3$, to trzynasty wyraz ciągu:
A. $a_{13} = 36$ B. $a_{13} = 37$ C. $a_{13} = 38$ D. $a_{13} = 39$
4. Ciąg $(-2, x, 8)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas:
A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$
5. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiemy, że $a_5 = 3$, $a_6 = -2$. Zatem:
A. $r = 1$ B. $x = -1$ C. $x = 5$ D. $x = -5$
6. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiemy, że $a_5 = 3$, $a_6 = -2$. Zatem:
A. $a_1 = 23$ B. $a_1 = 25$ C. $a_1 = 21$ D. $a_1 = 19$
7. Suma wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100 włącznie jest równa:
A. 5000 B. 5050 C. 5100 D. 5150
8. Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 7n + 2$ jest:
A. rosnący B. malejący C. stały D. niemonotoniczny
9. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 5?
A. $a_n = 3n - 6$ B. $a_n = 4 - n$ C. $a_n = 2n + 5$ D. $a_n = 3n - 1$
10. Różnica r ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 3n - 2$ jest równa:
A. 4 B. 3 C. 2 D. -2

