

Zapraszam na zajęcia on-line sobota, niedziela 7 – 8 .11 (2godz. obecności) zgodnie z planem lekcji

Instrukcja logowania: proszę skopiować do paska adresów poniższy adres:

<https://meet.google.com/wcu-okge-rue> i wcisnąć enter

Mam nadzieję, że uda się Państwu dołączyć do spotkania (posiadacze konta na szkolnej poczcie wchodzi bez problemów, pozostałe osoby po zaakceptowaniu przez prowadzącego. Gdyby ktoś miał problem proszę zgłosić opiekunowi semestru lub wicedyrektorowi (arnold.sidor@ckziu1.edu.pl)

TEMAT: Zbiór wartości, wartość najmniejsza i największa 1-godz

Miejsca zerowe. Funkcje różnowartościowe Monotoniczność funkcji. 1-godz

■ Odczytywanie zbioru wartości funkcji

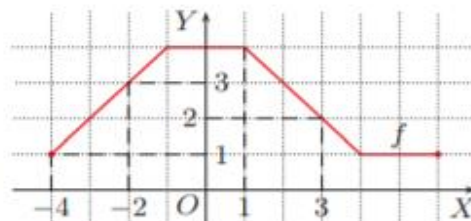
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji:
 $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$.
Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; 4 \rangle$.



Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

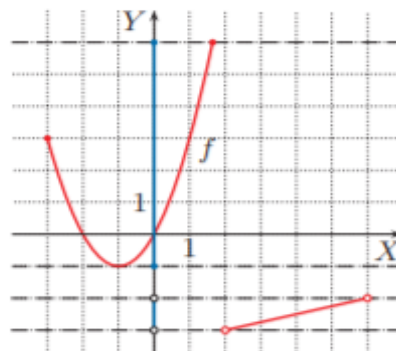
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

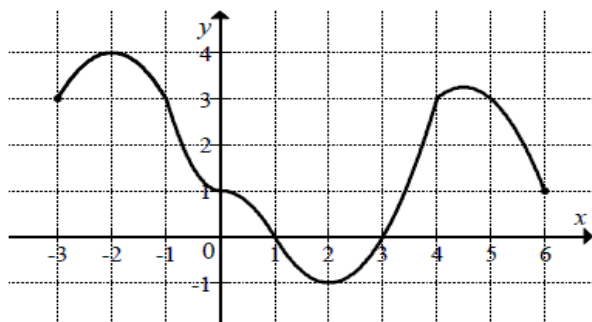
Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup \langle -1; 6 \rangle$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



1. Na podstawie wykresu funkcji f określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

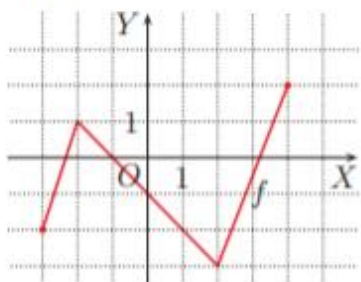


Miejsca zerowe funkcji, to argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero.

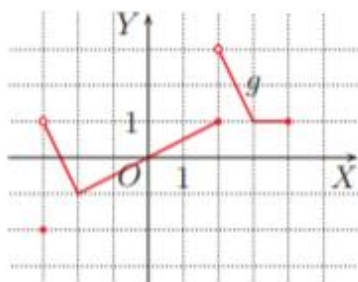
Funkcja f jest różnowartościowa gdy różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji.

Ćwiczenie 3

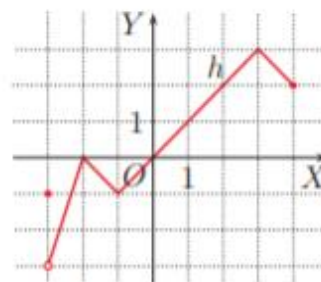
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.

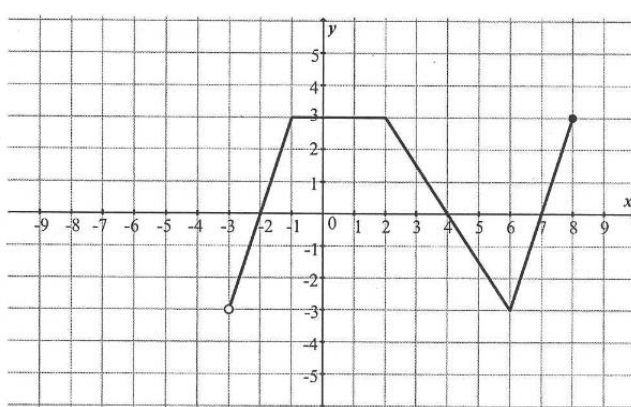
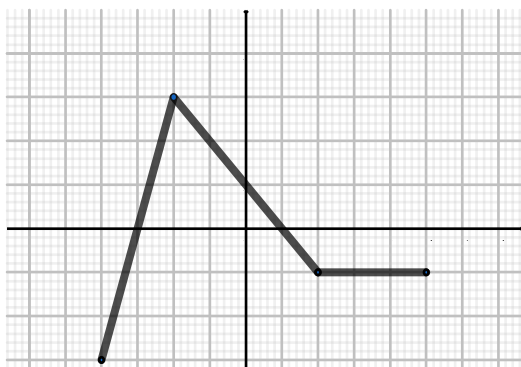


Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

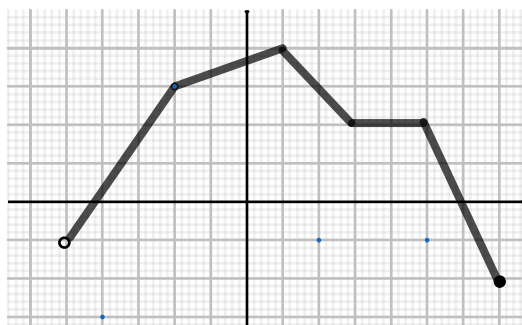
2. Na podstawie wykresu funkcji z zadania 1. odpowiedz na następujące pytania:

- Jaka jest wartość funkcji dla argumentu: a) $x = -3$, b) $x = 0$, c) $x = 2$, d) $x = 3$, e) $x = 5,5$?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość: : a) $y = 3$, b) $y = 0$, c) $y = 1$, d) $y = 4$, e) $y = -1$?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości: a) dodatnie, b) ujemne?
- Jakie są miejsca zerowe funkcji?

3. Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, a dla jakiego największą?



4. Dany jest wykres funkcji f :



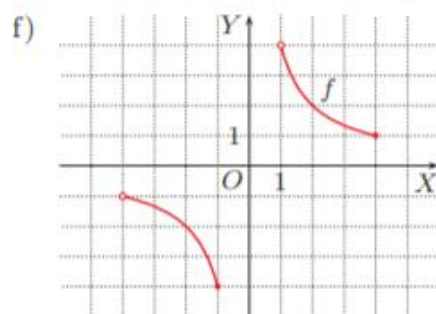
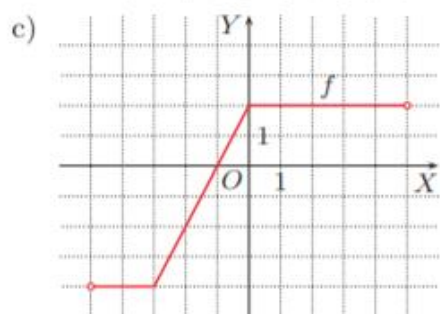
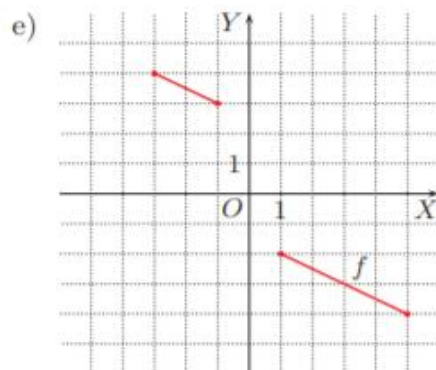
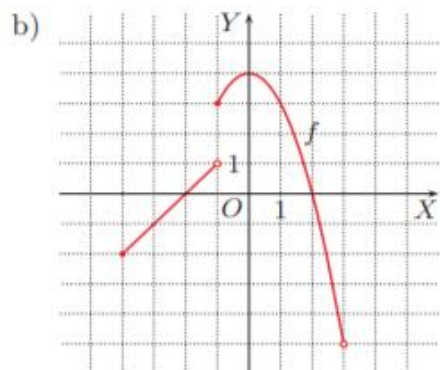
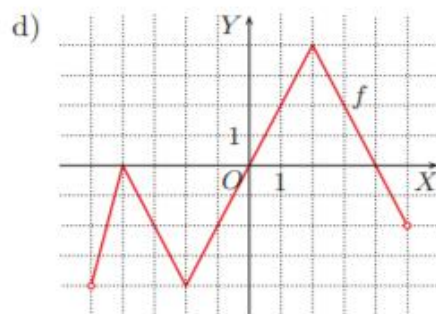
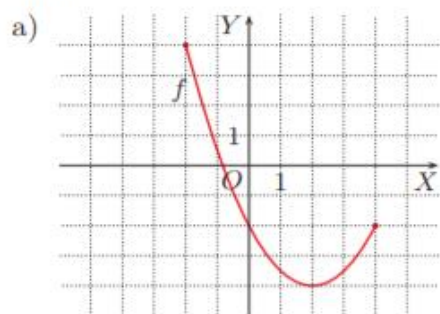
- Określ dziedzinę i zbiór wartości
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne
- Jaka jest wartość funkcji dla argumentu 1
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1.
- Oblicz: $f(2) - f(7)$
- Wyznacz miejsca zerowe funkcji
- Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, a dla jakiego największą.

5. Czy funkcja $y = 2x - 6$ określona na przedziale $(-\infty, 1>$ ma miejsce zerowe?

6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji: a) $y = 3x - 15$ b) $y = (x+2)(x-9)$.

Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

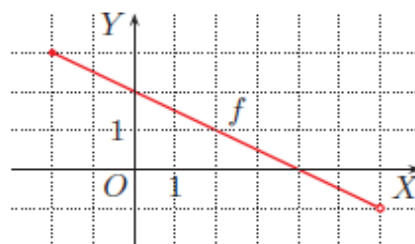
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

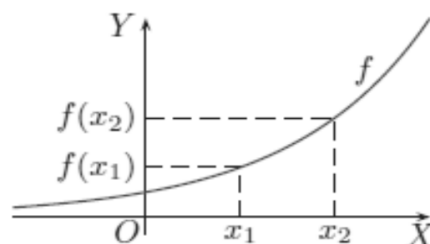
Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

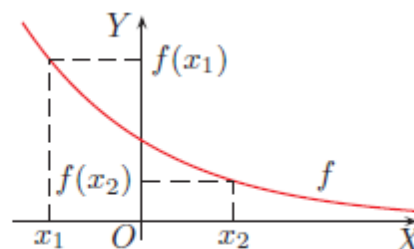


Funkcja jest rosnąca gdy większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$

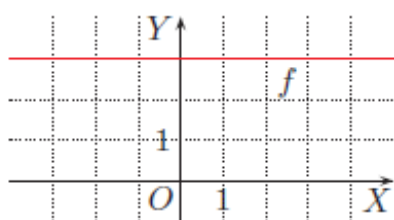


Funkcja jest malejąca gdy większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

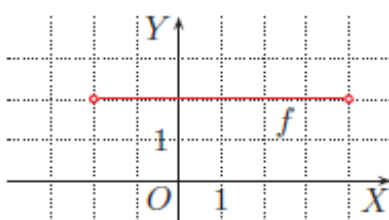
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

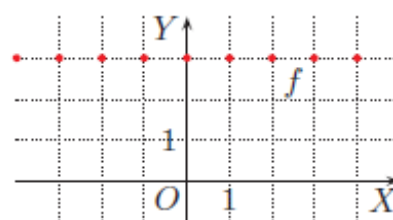
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$



$f: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2$



$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$

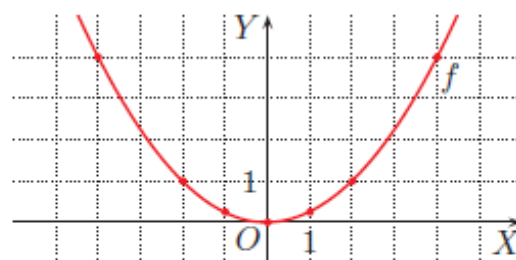
Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

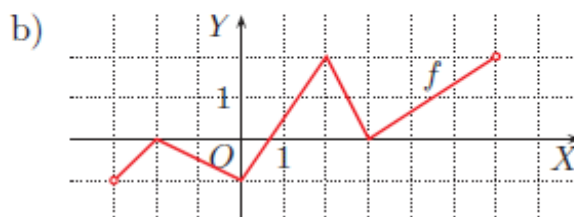
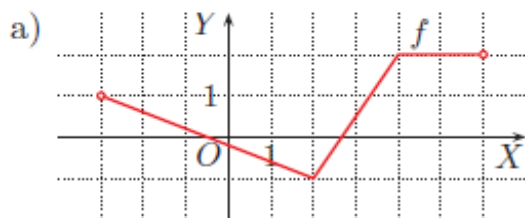
Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



W przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja f maleje, a w przedziale $\langle 0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

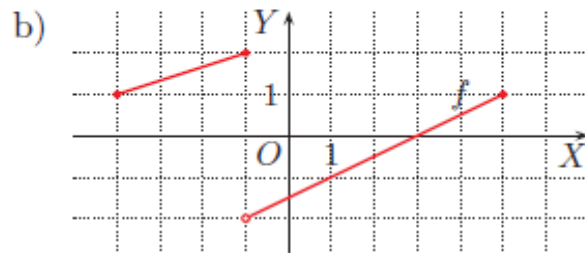
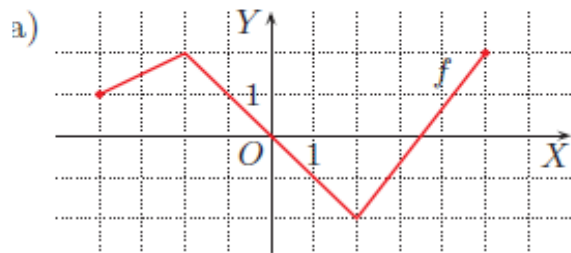
Zadanie 1.

Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



Zadanie 2.

Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



Zadanie 3

Odczytaj z wykresu funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbf{R}$ przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, jest niemalejąca.

