

Zapraszam na zajęcia on-line sobota, niedziela 7 – 8 .11 (3 godz. obecności) zgodnie z planem lekcji

Instrukcja logowania: proszę skopiować do paska adresów poniższy adres:

<https://meet.google.com/wcu-okge-rue> i wcisnąć enter

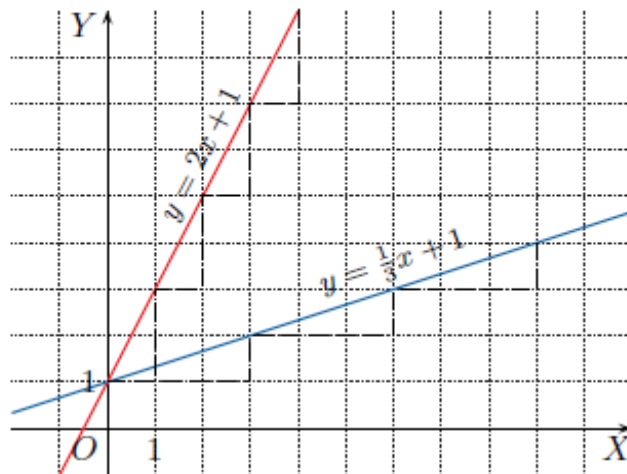
Mam nadzieję, że uda się Państwu dołączyć do spotkania (posiadacze konta na szkolnej poczcie wchodzi bez problemów, pozostałe osoby po zaakceptowaniu przez prowadzącego. Gdyby ktoś miał problem proszę zgłosić opiekunowi semestru lub wicedyrektorowi (arnold.sidor@ckziu1.edu.pl)

TEMAT: Prosta przechodząca przez dwa punkty -1 godz

Proste prostopadłe i równoległe -1 godz

Równanie prostej c.d - 1 godz.

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”. Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o dwie jednostki, a dla prostej $y = \frac{1}{3}x + 1$ wzrostowi argumentu o trzy jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o jedną jednostkę.



WYZNACZANIE RÓWNIANIA PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA PUNKTY

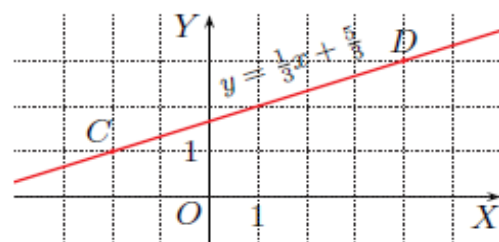
Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów} \\ \text{C i D do równania } y = ax + b \end{array}$$



Otrzymujemy $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$. Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$:

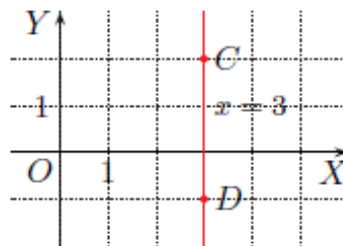
$$a = \frac{3 - (-7)}{(-2) - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów: P lub Q . Dla punktu P otrzymujemy: $-7 = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = -1$. Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Przykład 2

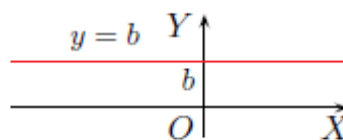
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.



Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Uwaga. Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Przykład 3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(2; 5)$ i $B=(4, 1)$.
 (x_1, y_1) (x_2, y_2)

Korzystamy z równania w postaci: $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$

Mamy wtedy $(1 - 5)(x - 2) - (4 - 2)(y - 5) = 0$

$$-4(x - 2) - 2(y - 5) = 0 \quad / : (-2)$$

$$2(x - 2) + (y - 5) = 0, \text{ czyli } 2x - 4 + y - 5 = 0 \text{ stąd}$$

$$2x + y - 9 = 0 \text{ – postać ogólna prostej albo } y = -2x + 9 \text{ – postać kierunkowa prostej.}$$

Korzystając z powyższego przykładu

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

- a) $P(4, 5), Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13), Q(2, -7)$ c) $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$

WYZNACZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH PUNKTU PRZECIĘCIA PROSTYCH

- Wyznacz współrzędne punktu przecięcia prostych k i l , jeżeli:
 - $k: 3x - 2y + 6 = 0$ $l: -4x - y + 14 = 0$
 - $k: 3x - y - 2 = 0$ $l: 2x + y - 8 = 0$
 - $k: x - 2y + 4 = 0$ $l: 2x + y - 7 = 0$
- Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta, mając dane równania trzech jego boków:
 $3x - y + 7 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad x + y - 3 = 0$

PROSTE PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE

Przypomnijmy, że proste o równaniach: $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ są równoległe, gdy równe są ich współczynniki kierunkowe, czyli gdy $a = a_1$.

Warunek prostokątności prostych jest podany w poniższym twierdzeniu.

TWIERDZENIE

Proste $y = ax + b$ ($a \neq 0$) i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a}$ (czyli $a \cdot a_1 = -1$).

Przykład 1

Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

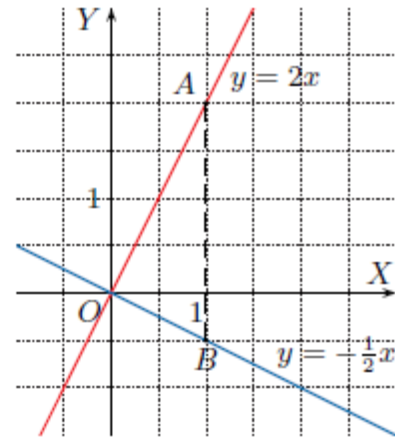
Punktem przecięcia tych prostych jest punkt $O(0, 0)$. Wybieramy punkt $A(1, 2)$ należący do prostej $y = 2x$ i punkt $B(1, -\frac{1}{2})$ należący do prostej $y = -\frac{1}{2}x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|OA| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|OB| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

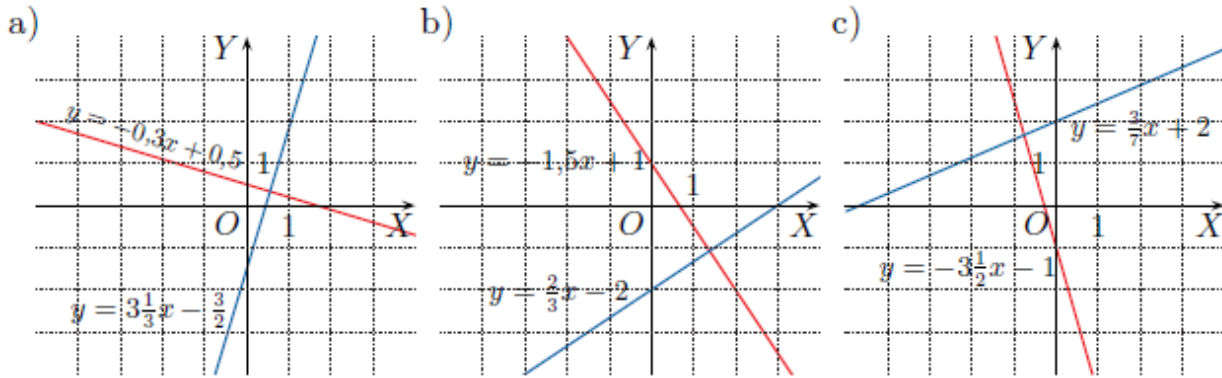
$$|AB| = \frac{5}{2}$$

Zauważmy, że $(\sqrt{5})^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, czyli trójkąt AOB jest trójkątem prostokątnym. Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Zadanie 3.

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.

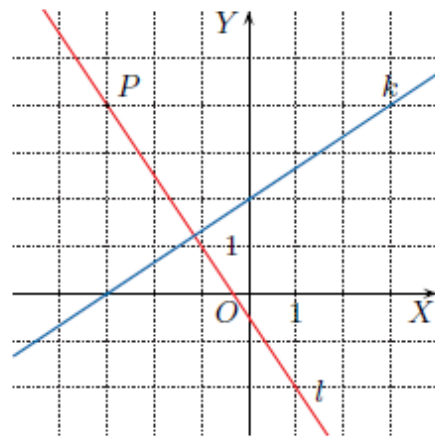


Przykład 2

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



4. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .
 - a. $k: y = 2x - 1$, $P = (3, 2)$
 - b. $k: 2x - y + 5 = 0$, $P = (-1, 1)$
5. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .
 - a. $k: y = 3x$, $P = (0, 2)$
 - b. $k: x - 5y + 2 = 0$, $P = (-1, 2)$
6. Znajdź równanie prostej $m: 3x + 2y - 4 = 0$, napisz równanie prostej k
 - a. równoległej do prostej m i przechodzącej przez punkt $K = (-2, -5)$
 - b. prostopadłej do prostej m i przechodzącej przez punkt $L = (-3, 0)$.
7. Wyznacz wartość m , dla której proste $x - 3y - 12 = 0$ i $(3m - 8)x - 3y - 18 = 0$ są
 - a. równoległe
 - b. prostopadłe
8. Zbadaj wzajemne położenie prostych k i l :

- a. k: $3x - 2y + 3 = 0$ l: $6x - 3y + 6 = 0$
b. k: $4x - 8y + 10 = 0$ l: $2x - 4y - 5 = 0$
c. k: $x - 2 = 0$ l: $2y - 4 = 0$
d. k: $\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}y - 3 = 0$ l: $5x - y - 3 = 0$

9. Punkty $A=(6, -1)$, $B=(10, 1)$ i $C=(2, 7)$ są wierzchołkami trójkąta ABC.
Wykaż, że trójkąt jest prostokątny. Oblicz pole tego trójkąta.
10. Punkty $A=(8, -5)$, $B=(-1, 4)$, $C=(-5, 0)$ i $D = (0, -5)$ są wierzchołkami czworokąta ABCD.
a. Wykaż, że czworokąt ten jest trapezem prostokątnym.
b. Oblicz pole tego trapezu.
11. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o równaniach:
 $x - y = 0$, $2x + y - 3 = 0$, $y + 1 = 0$.
12. Oblicz pole i obwód czworokąta o wierzchołkach: $A=(4, 1)$, $B=(2, 5)$, $C=(-2, 3)$ i $D = (0, -1)$.

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.

