

<https://meet.google.com/wcu-okge-rue> i wcisnąć enter

Mam nadzieję, że uda się Państwu dołączyć do spotkania (posiadacze konta na szkolnej poczcie wchodzą bez problemów, pozostałe osoby po zaakceptowaniu przez prowadzącego. Gdyby ktoś miał problem proszę zgłosić opiekunowi semestru lub wicedyrektorowi (arnold.sidor@ckziu1.edu.pl)

TEMAT: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ciąg arytmetyczny i geometryczny - zadania

DEFINICJA

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu.

TWIERDZENIE

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

TWIERDZENIE

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla każdego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Przykład

Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) , jeżeli $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_6 = a_4 \cdot q^2$, czyli $54 = 6q^2$.

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$ i kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$ i kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$

Zadanie 1.

Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) .

a) $a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{2}{15}$ c) $a_2 = 7, a_4 = 28$ e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$

b) $a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{1}{4}$ d) $a_3 = -3, a_6 = -24$ f) $a_6 = 1, a_8 = 9$

Zadanie 2.

Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 15, a_4 = 5$ b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{10}, a_4 = 10$

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ jest:
rosnący, gdy $q > 1$; malejący, gdy $0 < q < 1$; stały, gdy $q = 1$.

Przykład 2

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan konta wyniesie:

$$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1,05 = 2100 \text{ [zł]}$$

Po upływie dwóch lat:

$$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1,05 = 2205 \text{ [zł]}$$

Wpłata:	2000,00
$2000,00 \cdot 1,05 =$	2100,00
$2100,00 \cdot 1,05 =$	2205,00
$2205,00 \cdot 1,05 =$	2315,25
$2315,25 \cdot 1,05 \approx$	2431,01
$2431,01 \cdot 1,05 \approx$	2552,56

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Liczby: a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Średnia geometryczna

Jeśli liczby: a, b, c tworzące ciąg geometryczny są dodatnie, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy średnią geometryczną liczb a i c .

TWIERDZENIE

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Zadanie 3.

Liczby: x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.

Zadanie 4.

Wyznacz x i y tak, aby podane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) 2, x , 32, y b) 1, x , 2, y c) 18, x , 8, y d) x , $\frac{1}{10}$, y , 10

Przykład 1

Oblicz sumy S_5 i S_{10} ciągu geometrycznego: 1, 2, 4, 8, 16, ...

$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

TWIERDZENIE

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Zadanie 5

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

- a) 2, 4, 8, 16, ... b) 1, -2, 4, -8, ... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Zadanie 6.

Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:

- a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8},$ b) 18, 6, c) 15, -30, d) -7, -7.

Zadanie 6a

Oblicz sumę S_{10} ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz $a_2 = \frac{1}{16}$.

Zadanie 7

- a) Oblicz sumę S_7 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = -2$.
b) Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = -4$ oraz $q = 3$.

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$

$$1 - 3^n = -728$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Należy zsumować sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 8

- a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 635?
b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Zadanie 9

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

- a) $q = 2, S_4 = 60,$ b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046,$ c) $q = 1, S_4 = 480.$

Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Zadanie 10

a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.

b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.

Zadanie 11

Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami: pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r , wynosi po roku $k(1 + r)$.

Przykład 3

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że w kolejnych latach doliczane są odsetki w wysokości 6% do kapitału powiększonego o odsetki z poprzednich lat.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

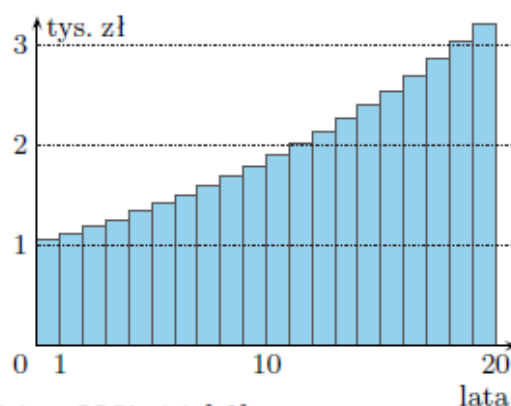
po roku: $k \cdot 1,06$

po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

⋮

po 20 latach: $k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]



Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r , po n latach wynosi $k(1 + r)^n$.

Zadanie 12

Jaką kwotą będziemy dysponowali po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r ?

- a) $n = 5$, $r = 4,5\%$ c) $n = 10$, $r = 3\%$
b) $n = 8$, $r = 5,5\%$ d) $n = 10$, $r = 4\%$

Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na procent składany.

Przykład 4

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz, jaką kwotę podejmą z banku po trzech latach, a jaką kwotę podjęliby po tym czasie, gdyby od naliczanych odsetek pobierano co roku podatek w wysokości 20%.

Oszczędności po trzech latach wyniosą: $5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25$ [zł].
Gdyby odsetki pomniejszane były o 20%, to w pierwszym roku wyniosłyby:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach mieliby: $5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58$ [zł].

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek dotyczy tylko dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Zadanie 13

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat na lokatę o oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wielkość dopisanych odsetek. Jak zmieniłaby się wielkość kapitału, gdyby od odsetek naliczany był podatek w wysokości 20% w skali roku?