

Semestr szósty LO MATEMATYKA

Zadania do rozwiązania należy rozwiązać i przesłać zdjęcia na maile grazyna-putkiewicz@wp.pl

Temat FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE kąta ostrego

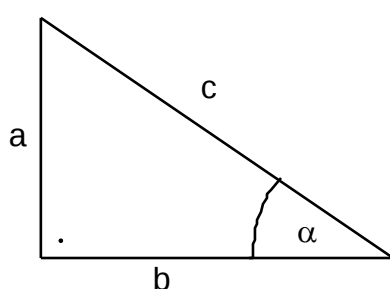
W trójkącie prostokątnym zachodzą związki między bokami trójkąta a kątem ostrym zwane funkcjami trygonometrycznymi. Są to *sinus*, *cosinus* i *tangens*.

α – kąt ostry

a - przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta ostrego

b - przyprostokątna leżąca przy kącie ostrym

c - przeciwprostokątna (najdłuższy bok)



Dla takich oznaczeń mamy definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{długość przyprostokątnej } a \text{ leżącej naprzeciw kąta ostrego } \alpha}{\text{długość przeciwprostokątnej } c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{długość przyprostokątnej } b \text{ leżącej przy kącie ostrym } \alpha}{\text{długość przeciwprostokątnej } c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ostrego } \alpha}{\text{długość przyprostokątnej leżącej przy kącie ostrym } \alpha}$$

A także **twierdzenie Pitagorasa**, które mówi, że

Suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej

i wyraża wzorem

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Uwaga: c to najdłuższy bok

Te funkcje przyjmują wartości liczbowe, które są umieszczone w postaci przybliżeń liczb dziesiętnych w tablicach trygonometrycznych. Dla kątów szczególnych tj. 30° , 45° i 60° wartości te podaje się dokładnie i wykorzystuje do obliczeń.

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

?

Zastosowanie

Wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla kątów 30° , 45° , 60° .

Zadanie 1. Oblicz patrząc do tabelki:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

a. $2\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$

b.
$$\frac{\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}$$

c.
$$\frac{\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

d. $(\cos 45^\circ - \cos 30^\circ)(\cos 45^\circ + \cos 30^\circ)$

Rozwiązanie przykładu b

$$\frac{\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

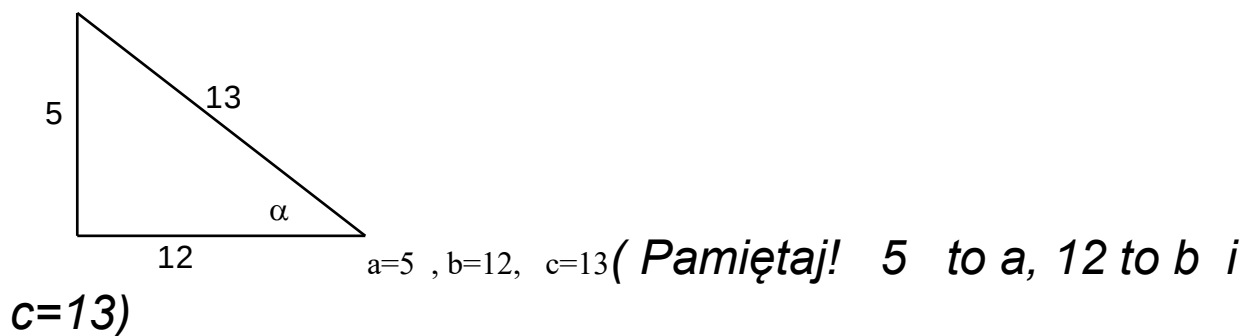
$$= \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \text{skracamy pierwiastki} = \frac{3}{1} = 3$$

Rozwiązanie przykładu d

$$\frac{\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} =$$

Dalej oblicz samodzielnie

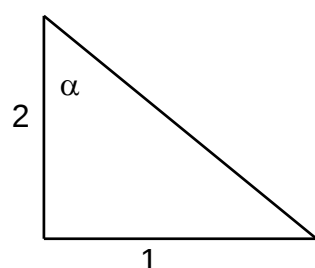
Zadanie 2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla danego trójkąta prostokątnego.



Tu wstawiamy do wzorów tylko odpowiednie liczby. Wstaw $\operatorname{tg} \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = -$$

Zadanie 3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla trójkąta prostokątnego (zastosuj wzory podstawiając odpowiednie liczby w miejsce liter a, b, c)



Mamy boki $a=1$ i $b=2$. I tu brakuje jednego boku, który jest przeciwprostokątną c .

Trzeba ją znaleźć korzystając z **twierdzenia PITAGORASA**.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gdzie za a podstawiamy 2, a za b liczbę 1. Otrzymujemy :

$$2^2 + 1^2 = c^2.$$

Liczymy:

$$4 + 1 = c^2$$

czyli

$$c^2 = 5$$

Pozbywamy się kwadratu wyciągając pierwiastek z obu stron:

$$c = \sqrt{5}$$

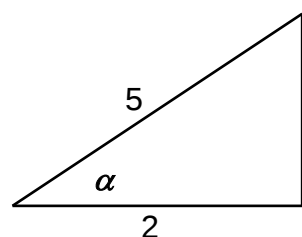
Teraz możemy obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych pamiętając o usuwaniu niewymierności w mianowniku

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla trójkąta prostokątnego



Tu nie mamy przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ostrego oznaczanej literą a , a mamy $b=2$ i $c=5$. Trzeba ją znaleźć korzystając z **twierdzenia PITAGORASA**:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gdzie za c podstawiamy 5, a za b liczbę 2. Otrzymujemy :

$$a^2 + 2^2 = 5^2.$$

Liczymy:

$$a^2 + 4 = 25$$

Przenosimy liczbę 4 na prawą stronę z przeciwnym znakiem czyli

$$a^2 = 25 - 4$$

to

$$a^2 = 21$$

Pozbywamy się kwadratu wyciągając pierwiastek z obu stron:

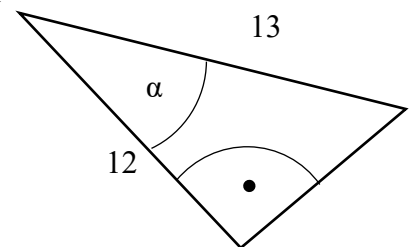
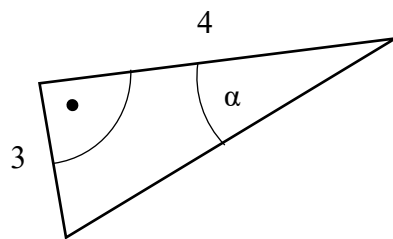
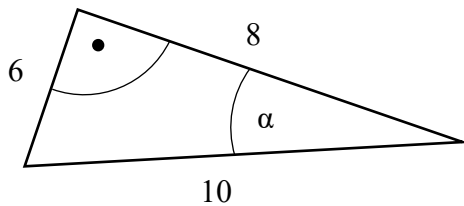
$$a = \sqrt{21}$$

Teraz możemy obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

ZADANIA do samodzielnego zrobienia

5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym na poniższych rysunkach.



6. Oblicz wartość wyrażenia, wykorzystując dane z zadania poprzedniego (czyli wstaw w miejsce $\operatorname{tg} \alpha$, $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ wyliczone ułamki i dalej licz na ułamkach)

a. $1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

b. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha$

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych na podstawie jednej danej funkcji

Zadanie 7. Mając dany $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$, oblicz wartość $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$

Rozwiązanie:

Mamy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ i wiemy, że $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Możemy przyjąć, że

$$a = \sqrt{7} \quad \text{i} \quad c = 5$$

czyli mamy przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta ostrego α oraz przeciwprostokątną. Nie mamy przyprostokątnej b leżącej przy kącie ostrym α , a jest ona potrzebna do obliczenia kosinusa i tangensa

Trzeba ją znaleźć korzystając z twierdzenia PITAGORASA:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gdzie za c podstawiamy 5, za a liczbę $\sqrt{7}$.

Otrzymujemy: $(\sqrt{7})^2 + b^2 = 5^2$.

Liczymy: $(\sqrt{7})^2 = 7$ bo kwadrat likwiduje pierwiastek kwadratowy
 $7 + b^2 = 25$

Przenosimy liczbę 7 na prawą stronę z przeciwnym znakiem czyli

$$b^2 = 25 - 7$$

to $b^2 = 18$

Pozbywamy się kwadratu wyciągając pierwiastek z obu stron:

$$b = \sqrt{18}$$

tu musimy wyciągnąć czynnik przed pierwiastek rozkładając liczbę 18 na czynniki $18 = 9 \cdot 2$ i wtedy mamy

$$b = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Teraz możemy obliczyć wartości brakujących funkcji trygonometrycznych pamiętając o usunięciu niewymierności w mianowniku tangensa:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

Zadania do samodzielnej pracy(robimy dokładnie tak jak zadanie powyższe) i przesłania na maila

Zadanie 8 .Mając dany $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartość $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$

Zadanie 9 .Mając dany $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, oblicz wartość $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$

Zadanie 10 .Mając dany $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, oblicz wartość $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$

Zadanie 11 Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

b. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$

c. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Zadanie 12 Sprawdź, czy istnieje kąt α spełniający podany warunek. (sinus i cosinus kąta ostrego mają wartości mniejsze od 1, trzeba wyznaczyć, ile wynosi wartość funkcji w danym zapisie)

a. $\cos \alpha = 7 - 11 \cos \alpha$

b. $5 + 2 \sin \alpha = 9$

Rozwiązanie a

$$\cos \alpha = 7 - 11 \cos \alpha$$

przenoszę cosinus do cosinusa

$$\cos \alpha + 11 \cos \alpha = 7$$

$$12 \cos \alpha = 7$$

dzielę obie strony przez 12, żeby mieć sam cosinus

$$\cos \alpha = \frac{7}{12}$$

i mamy tu wartość cosinusa poprawną, bo trzeba wiedzieć, że cosinus kąta ostrego może mieć wartość mniejszą niż 1,

a liczba $\frac{7}{12}$ jest mniejsza niż jeden. Podobnie sinus ma też wartość mniejszą niż 1. Sprawdź to w przykładzie b.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego zachodzą następujące zależności, które są spełnione dla wszystkich kątów.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ jest to „jedynka trygonometryczna”

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

4. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

5. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

6. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

$$7. \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Zastosowanie wzoru 1.

$$a) \quad \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$$

$$b) \quad \sin^2 33^\circ + \cos^2 33^\circ = 1$$

$$c) \quad \sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1$$

$$d) \quad \sin^2 72^\circ + \cos^2 72^\circ = 1$$

$$e) \quad \sin^2 88^\circ + \cos^2 88^\circ = 1$$

Zastosowanie wzoru 3 i 4.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \quad \text{bo} \quad 30^\circ = 90^\circ - 60^\circ \text{ i } \sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$$

sinus przechodzi na cosinus ale innego kąta

$$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ \quad \text{bo} \quad 3^\circ = 90^\circ - 87^\circ \text{ i } \sin 3^\circ = \sin(90^\circ - 87^\circ) = \cos 87^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ \quad \text{bo} \quad 40^\circ = 90^\circ - 50^\circ \text{ i } \sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ \quad \text{bo} \quad 30^\circ = 90^\circ - 60^\circ \text{ i } \cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

i $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$\cos 13^\circ = \sin 77^\circ \quad \text{bo} \quad 77^\circ = 90^\circ - 13^\circ$$

i $13^\circ + 77^\circ = 90^\circ$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ \quad \text{bo} \quad 67^\circ = 90^\circ - 23^\circ \text{ i } \cos 67^\circ = \cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ$$

i $67^\circ + 23^\circ = 90^\circ$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$\cos 7^\circ = \sin 83^\circ$$

$$\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$$

$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$$

$$\sin 39^\circ = \cos 51^\circ$$

Zwróć uwagę, że suma kątów przy obu funkcjach wynosi 90°

Zastosowanie wzoru 1, 3, 4 razem.

$$a) \quad \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$$

$$b) \quad \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ = \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ = 1$$

$$c) \quad \cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ + 5 = \cos^2 10^\circ + \sin^2 100^\circ + 5 = 1 + 5 = 6$$

Zastosowanie wzoru 5,6,7

Oblicz a) $\sin 120^\circ$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \text{wzór 5} = \sin 60^\circ$$

b) $\cos 135^\circ$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ$$

c) $\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ$

Zadanie 13. Dokończ stosując odpowiednie wzory

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ =$

b) $\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ =$

c) $\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ =$

d) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ + 3 =$

e) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ + 7 + \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ =$

Zadanie 14. Dokończ stosując odpowiednie wzory

a) $\cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + 2$

b) $\sin 32^\circ \cos 58^\circ + \cos 32^\circ \sin 58^\circ$

Zadanie 15. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów : 120° , 150° , 135° .

Inne zastosowanie wzorów.

Zad.16 Uprość wyrażenie stosując podstawowe wzory trygonometryczne

a) $\sin^2 \alpha + 2 + \cos^2 \alpha =$

Odp. $\sin^2 \alpha + 2 + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 = 1 + 2 = 3$

b) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha =$

Odp. $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = 1 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha =$

$$= \left\{ \text{zastosuj wzór } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right\} =$$

$$= \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1} = \left\{ \text{skracamy } \cos^2 \alpha \text{ z } \cos^2 \alpha \right\} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

c) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha =$

Odp. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = \left\{ \text{wzór } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right\} =$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha =$$

$$= \left\{ \text{skracamy cosinusy} \right\} = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$$

Zadanie 17 do samodzielnego rozwiązania

Uprość wyrażenia:

a. $\sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha$

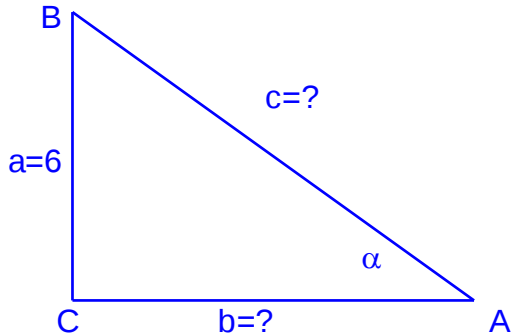
b. $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha - 5$

$$c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$d. (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$$

Zadanie 18

Znajdź brakujące boki trójkąta prostokątnego i oblicz jego pole wiedząc, że kąt przy wierzchołku A jest równy 30° .



Szukamy boku c korzystając ze wzoru na *sinus*, bo $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Podstawiamy dane z zadania $\sin 30^\circ = \frac{6}{c}$, a z tabelki wartości funkcji dla szczególnych kątów ostrych odczytujemy, że $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ i mamy równanie z niewiadomą c.

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{c}$$

Mnożymy na krzyż:

$$1 \cdot c = 2 \cdot 6$$

$$\underline{c = 12}$$

Teraz poszukamy boku b z funkcji trygonometrycznej *tangens*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Podstawimy dane :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6}{b},$$

wartość $\operatorname{tg} 30^\circ$ odczytujemy z tabelki i mamy

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{b}$$

Mnożymy na krzyż:

$$b \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 6$$

żeby pozbyć się liczby przy niewiadomej b dzielimy obie strony przez $\sqrt{3}$

$$b \cdot \sqrt{3} = 18 \quad |: \sqrt{3}$$

otrzymujemy

$$b = \frac{18}{\sqrt{3}}, \text{ ale tu pojawiła się niewymierność}$$

w mianowniku, którą trzeba usunąć mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{3}$, a na koniec skrócić

$$b = \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

Teraz obliczymy pole trójkąta prostokątnego korzystając

ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

Odp. Pole trójkąta wynosi $18\sqrt{3}$, boki $b=6\sqrt{3}$ i $c=12$.

Obliczanie pola trójkąta i równoległoboku ze wzorów z sinusem

Należy znać na maturę wzory takie

Wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

gdzie a, b boki trójkąta i α to kąt między tymi bokami

Wzór na pole równoległoboku (rombu też)

$$P = ab \sin \alpha$$

gdzie a, b - boki równoległoboku i α to kąt między tymi bokami

Zad.19 Oblicz pole rombu o boku $a=12$ i kącie ostrym $\alpha=30^\circ$

Pole rombu obliczamy ze wzoru $P = ab \sin \alpha$ gdzie

$$a=b=12 \quad \text{i} \quad \alpha=30^\circ, \text{ więc}$$

$$P = ab \sin \alpha = 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 144 \cdot \frac{1}{2} = 72$$

Zad.20 Oblicz pole trójkąta o bokach 5 i 12 i kącie między nimi $\alpha=60^\circ$

Pole trójkąta obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ gdzie

$$a=5 \quad \text{i} \quad b=12 \quad \text{i} \quad \alpha=60^\circ, \text{ więc}$$

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3}$$

TEST z trygonometrii

1. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 i 3 wynosi:

- A. 4 B. $\sqrt{13}$ C. 1 D. 5

2. Jeśli $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ to $\operatorname{tg} \alpha$ wynosi

- A. $\frac{7}{5}$ B. 2 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

3. Wartość wyrażenia $\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ + 3$ wynosi

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 4

4. Jeśli $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, to $\operatorname{tg} \alpha$ jest równy

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

5. Wartość wyrażenia $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$

- A. 4 B. 0 C. 1 D. 5

6. Jeśli $\sin \alpha = \cos 27^\circ$ to kąt α wynosi

- A. 27° B. 33° C. 153° D. 63°

7. Pole równoległoboku kącie ostrym 60° i bokach 6 i 11 wynosi

- A. 66 B. 33 C. $33\sqrt{3}$ D. $66\sqrt{3}$

8. Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej 4 i przeciwprostokątnej 5 wynosi

- A. 4 B. 12 C. 20 D. 6

9. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ to $\sin \alpha$ wynosi

- A. $\frac{7}{5}$ B. 2 C. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ D. $\frac{4}{3}$

10. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych. To kąty ostre mają

- A. $45^\circ, 45^\circ$ B. $15^\circ, 75^\circ$ C. $60^\circ, 30^\circ$ D. za mało danych, żeby odpowiedzieć

Temat lekcji Kąty w kole

Trzeba znać pojęcia: **kąt wpisany, kąt środkowy i ich zależności** oraz kąty przyległe i wierzchołkowe. Wykorzystaj link;

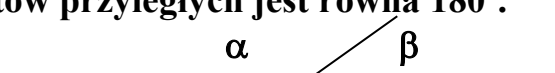
KLIKNIJ w TO

<https://youtu.be/Up21HZnqDOw>

Albo oglądaj film na you tube. Napisz you tube kąt środkowy i wpisany i wybierz film , który ma w tytule ; kąt środkowy i wpisany część 43 z 61. Obejrzyj

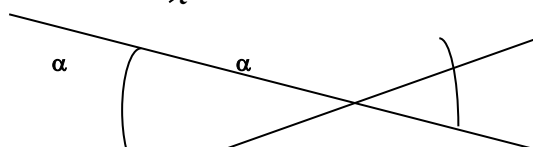
TEMAT: KĄTY przyległe, kąty wierzchołkowe

Suma kątów przyległych jest równa 180° .



$$\alpha + \beta = 180^{\circ}$$

Kąty wierzchołkowe są równe



Zadania

1. Jeden z kątów przyległych jest o 40° większy od drugiego. Ile stopni ma każdy z tych kątów?

Rozwiązanie: Jeden kąt to α , drugi to $\alpha + 40^{\circ}$, a ich suma to 180° .

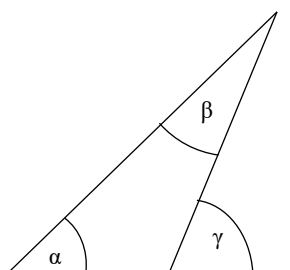
Dalej samodzielnie

2. Kąt α jest 4 razy mniejszy od kąta do niego przyległego. Jaką miarę ma kąt α ?

Rozwiązanie>. Jeśli jeden jest 4 razy mniejszy to drugi jest 4 razy większy czyli jeden α , drugi 4α , a są przyległe to ich suma $= 180^{\circ}$, czyli $\alpha + 4\alpha = 180^{\circ}$, Dalej samodzielnie liczymy kąt alfa

3. Kąt β na rysunku ma 30° . Ile stopni ma kąt α ? **Suma kątów w trójkącie wynosi 180° . Kropka w kącie oznacza kąt prosty**

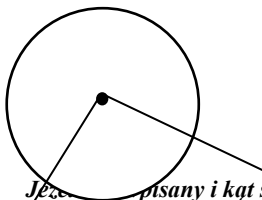
4. Kąty α i β na rysunku obok są kątami wewnętrznymi trójkąta, a kąt γ jest kątem zewnętrznym tego trójkąta. Wiemy, że $\alpha = 45^{\circ}$, a $\beta = 25^{\circ}$.Oblicz γ .



5. Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt (suma każdych dwóch boków jest zawsze większa niż pozostały)
- a. 2, 5, 3 b. 3, 4, 5 c. 1, 1, 1 d. 8, 2, 4 e. 10, 1, 10 f. 2, 3, 7

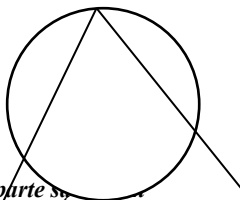
TEMAT: KĄTY W KOLE.

Kąt środkowy

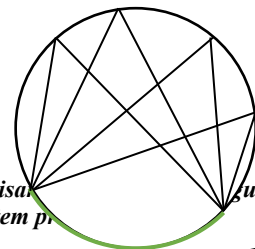


Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy oparte są na tym samym łuku to, kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego.

Kąt wpisany



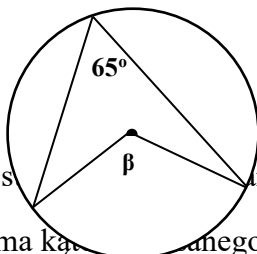
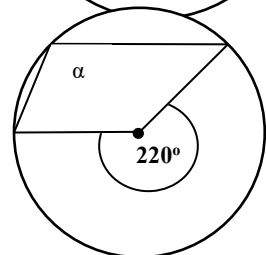
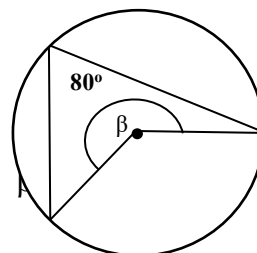
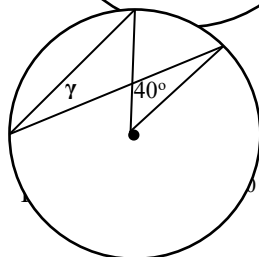
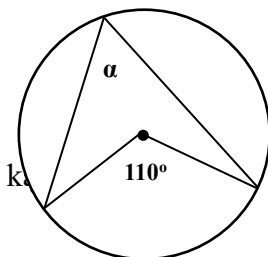
Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe



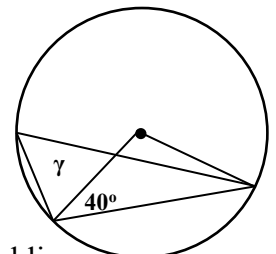
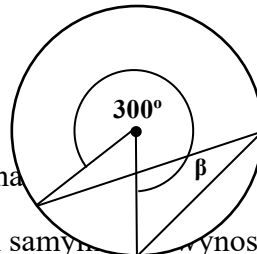
Kąt wpisany oparty na tym samym łuku jest kątem prostym.

ZADANIA

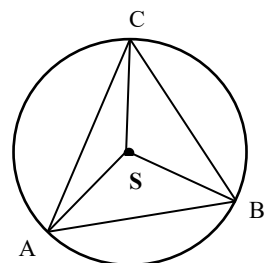
1. Oblicz miary kątów α , β , γ :



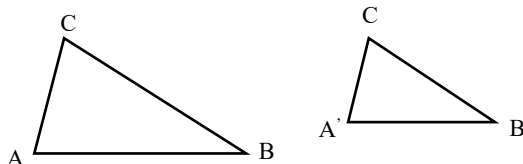
2. Ile stopni ma kąt wpisany oparty na $\frac{1}{4}$ okręgu, a jaką na kąt środkowy?



3. Suma kątów wpisanego i środkowego opartych na tym samym łuku wynosi 120° . oblicz miarę kąta środkowego. (na którymś filmie jest rozwiązanie)
4. Kąt ASB ma 110° , a kąt BSC ma 130° . Oblicz miary kątów trójkąta ABC



TEMAT: PODOBIENSTWO TRÓJKATÓW.



Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.

Cechy podobieństwa trójkątów

- I. Jeżeli trzy boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

$$\text{Jeżeli } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ to } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

- II. Jeżeli dwa boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąt między tymi bokami są równe to te trójkąty są podobne.

$$\text{Jeżeli } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ i } \angle B'A'C' = \angle BAC, \text{ to } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

- III. Jeżeli dwa kąty pewnego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta to te trójkąty są podobne.

$$\text{Jeżeli } \angle B'A'C' = \angle BAC \text{ i } \angle A'B'C' = \angle ABC, \text{ to } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

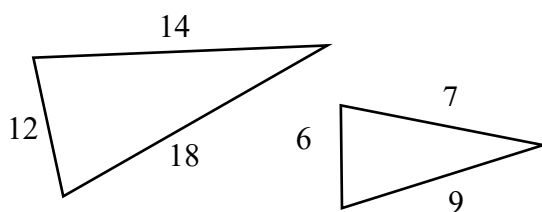
Uwaga! Skala podobieństwa $\Delta A'B'C'$ do ΔABC jest równa stosunkowi odpowiadających sobie boków:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

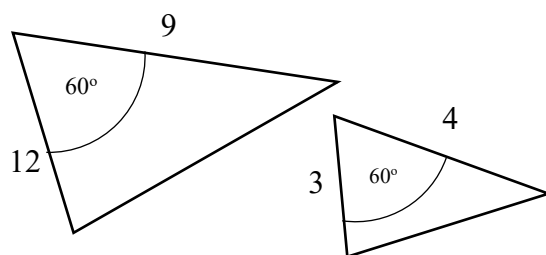
ZADANIA

1. Czy trójkąty przedstawione na rysunkach są podobne?

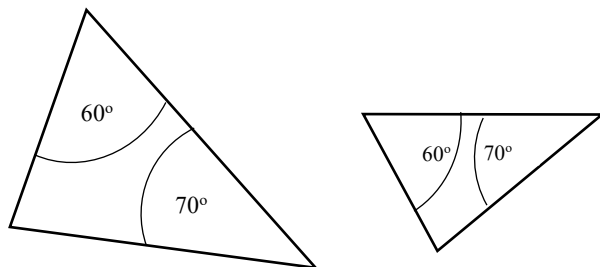
a)



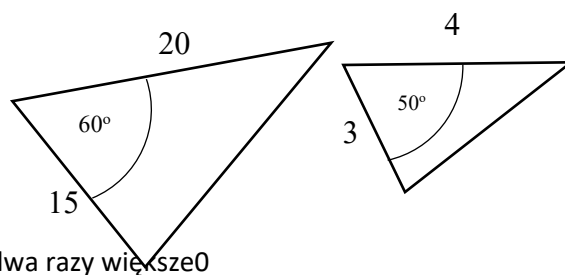
c)



b)



d)



Odp a) tak, bo boki są proporcjonalne czyli dwa razy mniejsze (albo dwa razy większe)

Odp b) tak bo kąty mają równe

Odp d) nie, bo choć boki drugiego są 5 razy mniejsze, ale kąty między bokami są RÓŻNE

2..Boki ΔABC są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta PQR podobnego do ΔABC ma 33cm.

Wyznacz pozostałe boki ΔPQR . (łatwe)

Pozostałe zadania dla chętnych do zdawania matury

3..Boki trójkąta ABC mają długość $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC i obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 60 cm. Oblicz skalę podobieństwa i długości boków trójkąta $A'B'C'$.

$$\text{Wskazówka Skala podobieństwa } k = \frac{\text{bok}}{\text{odpowiedniego boku}} = \frac{\text{obwód } \Delta ABC}{\text{obwód } \Delta A'B'C'}$$

4.. Drzewo rzuca cień 6 razy dłuższy od cienia Wojtka, który ma 172 cm wzrostu. Jaka jest wysokość drzewa?

Wskazówka. Narysuj odpowiednie trójkąty prostokątne , które są podobne i zapisz proporcję

SEMESTR SZÓSTY MATEMATYKA

. Temat Powtórzenie wiadomości z geometrii analitycznej

Konieczne jest:

1. wzór na długość odcinka
2. wzór na środek odcinka
3. proste równoległe i prostopadłe

Temat . Długość odcinka. Środek odcinka

Środek odcinka AB oznaczamy $S=(x,y)$ i współrzędne liczymy ze wzoru

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad i \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Długość odcinka AB liczymy ze wzoru $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Przykłady

1. Znajdź długość odcinka o końcach $A=(3,9)$ i $B=(4,5)$

Liczby podane pierwsze to x , drugie liczby to y czyli $x_1 = 3, x_2 = 4, y_1 = 9, y_2 = 5$

Podstawiamy dane do wzoru

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \text{ to jest długość odcinka AB}$$

2. Znajdź długość odcinka o końcach $A=(-2,7)$ i $B=(-4,5)$

Liczby podane pierwsze to x , drugie liczby to y czyli $x_1 = -2, x_2 = -4, y_1 = 7, y_2 = 5$

Podstawiamy dane do wzoru

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ to jest długość odcinka AB}$$

3. Znajdź środek odcinka o końcach $A=(3,9)$ i $B=(7,5)$

Liczby podane pierwsze to x , drugie liczby to y czyli $x_1 = 3, x_2 = 7, y_1 = 9, y_2 = 5$

Podstawiamy dane do wzoru

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad i \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x = \frac{3+7}{2} \quad i \quad y = \frac{9+5}{2}$$

$$x = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad i \quad y = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Czyli środek $S=(5, 7)$

4. Znajdź środek odcinka o końcach $A=(-2, -5)$ i $B=(8,3)$

Liczby podane pierwsze to x , drugie liczby to y czyli $x_1 = -2, x_2 = 8, y_1 = -5, y_2 = 3$

Podstawiamy dane do wzoru

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1+x_2}{2} \quad i \quad y = \frac{y_1+y_2}{2} \\x &= \frac{-2+8}{2} \quad i \quad y = \frac{-5+3}{2} \\x &= \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad i \quad y = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

Czyli środek $S=(3, -1)$

Zadania do robienia samodzielnego. Proszę wybrać dwa i przesłać rozwiązania

- 1.. Znajdź odległość punktu $P(1,7)$ od początku układu współrzędnych
2. Znajdź odległość podanych punktów a) $P=(1,2)$ i $K=(2,7)$ b) $C=(7,11)$ i $D=(7,3)$
3. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $A(1,3)$ $B(3,7)$ $C(7,2)$
4. Znajdź środek odcinka AB gdy a) $A=(1,2)$ i $B=(5,12)$ b) $A=(2,5)$ i $B=(-4, 11)$
5. Punkt $A(3,-7)$ jest końcem odcinka AB , którego środek to punkt $S(-3,13)$. Znajdź punkt B .
6. Punkt $M=(3, 4)$ jest środkiem odcinka o końcach $A=(a, 5)$ i $B=(7,b)$. Znajdź a i b
- 7.(maturalne). Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez początek układu i punkty przecięcia prostej $y=x+6$ z osiami układu współrzędnych oraz jego obwód.
- 8.(maturalne). Oblicz długości środkowych (**środkowa to odcinek , który łączy wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku**) trójkąta ABC gdy $A=(2, 6)$ $B=(6, -2)$ i $C=(-4, 4)$
9. (maturalne). Punkt $B(-4, 4)$ jest końcem odcinka BC . Punkt C leży na osi OX , a środek S na osi OY . Znajdź punkty C i S .

Temat; Proste równoległe

Proste są do siebie równoległe jeśli mają ten sam współczynnik kierunkowy a

Przykłady prostych równoległych

a) $y=124x+9$ i $y=124x-5$

b) $y=-6x+12$ i $y=-6x-2$

Zad. Wybierz poprawną odpowiedź

1.prosta $y=5x-2$ jest równoległa do

A. $y=-2x+5$ B. $y=5x$ C. $y=-5x+1$ D $y=x-9$

2. Prosta $y = \frac{5}{3}x - 8$ jest równoległa do

A. $y = 8x + 5$ B. $y = 5x + 6$ C. $y = \frac{5}{3}x + 4$ D. $y = \frac{1}{3}x - 1$

Zadanie

Dla jakiego m proste są równoległe

a) $y = (4m-1)x + 3$ i $y = 15x - 2$

Rozwiązanie. Proste są równoległe, jeśli mają taki sam współczynnik kierunkowy czyli

$$4m-1=15$$

Stąd wylicz m

b) $y = (4m-12)x + 1$ i $y = (m+27)x - 32$

Rozwiązanie. Proste są równoległe, jeśli mają taki sam współczynnik kierunkowy czyli

$$4m-12=m+27$$

Stąd wylicz m

Temat: Proste prostopadłe

Dwie proste będą prostopadłe, jeżeli współczynnik kierunkowy jednej prostej będzie odwrotnością z przeciwnym znakiem drugiej prostej

Np.

a) $y = -4x + 9$ i $y = \frac{1}{4}x + 6$

b) $y = 5x + 9$ i $y = -\frac{1}{5}x + 2$

c) $y = \frac{5}{4}x + 1$ i $y = -\frac{4}{5}x - 123$

d) $y = \frac{11}{7}x + 6$ i $y = -\frac{7}{11}x + 2$

e)

Zad. Wybierz poprawną odpowiedź

1. Prosta $y = 5x + 9$ jest prostopadła do prostej

A. $y = -2x + 5$ B. $y = 5x$ C. $y = -\frac{1}{5}x + 1$ D. $y = 9x - 8$

2. Prosta $y = \frac{7}{3}x - 8$ jest prostopadła do prostej

A. $y = 8x + 5$ B. $y = 5x + 6$ C. $y = -\frac{3}{7}x + 4$ D. $y = \frac{1}{3}x - 1$

Warto też pamiętać taki warunek prostokątności prostych, który stosuje się w trudniejszych zadaniach

Dwie proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostokątne to jest spełniony warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$

1. Dla jakiego m proste są prostokątne (łatwe zadania)

a) $y = (4m-1)x+3$ i $y = \frac{1}{7}x-2$

rozwiązanie:

Z drugiej prostej łatwo jest odwrócić współczynnik kierunkowy i zmienić znak czyli -7 i taki współczynnik musi mieć pierwsza prosta więc

$$4m-1 = -7$$

$$4m = -7+1$$

$$4m = -6 \quad / :4$$

$$m = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

b) $y = (2m-4)x+3$ i $y = -\frac{1}{72}x-2$

te proste mają prostokątne, więc współczynnik pierwszej $2m-4$ musi być odwrotność z przeciwnym znakiem liczby $-\frac{1}{72}$ czyli 72 czyli

$$2m-4 = 72$$

Dalej samodzielnie

Grażyna Putkiewicz