

KONSPEKT

Temat lekcji: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Reguła mnożenia. (4 godziny lekcyjne)

1.1. Reguła mnożenia

Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast O – orła, a R – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO, oR, rO, rR$$



Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry. Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – para liczb.
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2	
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3	
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4	
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5	
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6	

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

REGUŁA MNOŻENIA

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Uwaga. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać: $\overline{A}$ (lub $|A|$).

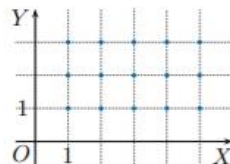
Komentarz

Warto powiedzieć uczniom, że symbol $\overline{A}$ często nazywany jest *liczebnością* lub *mocą* zbioru A .

Przykład 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga – do zbioru $B = \{1, 2, 3\}$?

$\overline{A} = 5$ oraz $\overline{B} = 3$, więc takich punktów jest $\overline{A} \cdot \overline{B} = 15$.

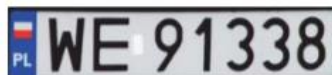


REGUŁA MNOŻENIA

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n -tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr, jeśli mogą w nich występować jedynie litery W, E oraz cyfry: 1, 3, 8, 9 (litery i cyfry mogą się powtarzać)?



Takich numerów jest: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

Obejrzyjcie film

<https://www.youtube.com/watch?v=xZAqaQMwcf8>

a następnie wykonajcie zadania

ZADANIA

- Ile jest wszystkich par (x, y) , w których $x \in A$ i $y \in B$, jeśli:
 - $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 - A – zbiór dzielników liczby 24, B – zbiór dzielników liczby 100?
- Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
 - litery: A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5;
 - 26 liter alfabetu oraz dowolne cyfry?
- Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
 - litery: A, B, C oraz cyfry: 1, 2, 3, 4;
 - litery: A, B, C, D oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5, 6?
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 5, występuje w nich jedna cyfra 2, jedna cyfra 4, a pozostałe cyfry są zerami?

Cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 4 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest zatem $7 \cdot 6 = 42$.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 3 oraz:

- występuje w nich jedna cyfra 4, jedna cyfra 6 i jedna cyfra 8, a pozostałe cyfry są zerami,
- występuje w nich jedna cyfra 7, jedna cyfra 9, a pozostałe cyfry są zerami, jeśli liczba ta jest podzielna przez 100,
- suma cyfr jest równa 6, a cyfry różne od zera nie powtarzają się?

1.2. Permutacje

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.



Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przedstawiając liczby: 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przedstawiając liczby: 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy **permutacjami**.

DEFINICJA

Permutacją n -elementowego zbioru A nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy na pierwszym miejscu. Następnie jedną z czterech pozostałych książek ustawiamy na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Zgodnie z regułą mnożenia możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

DEFINICJA

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (czyt. n silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:
 $(n+1)! = n!(n+1)$. Na przykład: $8! = 7! \cdot 8$.

Ćwiczenie 4

Podaj, jaką liczbę należy wstawić w miejsce .

a) $4! = 3! \cdot \text{?}$ b) $12! = 11! \cdot \text{?}$ c) $101! = 100! \cdot \text{?}$

Ćwiczenie 5

Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$ c) $\frac{8!}{10!}$ e) $\frac{2! \cdot 5!}{3!}$ g) $\frac{4! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}$
b) $\frac{7!}{5!}$ d) $\frac{11!}{8!}$ f) $\frac{3! \cdot 10!}{9!}$ h) $\frac{5! \cdot 6!}{4! \cdot 4!}$

$0!$	$=$	1
$1!$	$=$	1
$2!$	$=$	2
$3!$	$=$	6
$4!$	$=$	24
$5!$	$=$	120
$6!$	$=$	720
$7!$	$=$	5 040
$8!$	$=$	40 320
$9!$	$=$	362 880
$10!$	$=$	3 628 800
$11!$	$=$	39 916 800
$12!$	$=$	479 001 600

TWIERDZENIE

Wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest $n!$

Uwaga. Liczbę permutacji zbioru obliczamy, korzystając z powyższego wzoru lub z reguły mnożenia.

Proszę obejrzeć w razie problemów film na temat permutacji

<https://www.youtube.com/watch?v=zfN1nHzWKrw>

<https://www.youtube.com/watch?v=92KPhyyfqak>

i następnie wykonać zadania

ZADANIA

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56789?
b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245768?
c) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?
2. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.
a) Ile jest takich liczb większych od pięćdziesięciu tysięcy?
b) Ile jest takich liczb mniejszych od trzynastu tysięcy?
3. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Ilu jest zawodników, jeśli numery startowe możemy przydzielić na 5040 sposobów?
b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ilu jest zawodników?
4. Do biegu przystąpiło sześciu zawodników z numerami od 1 do 6. Za wynik biegu uważamy kolejność przybycia zawodników na metę.
a) Ile może być wyników biegu?
b) Ile może być wyników biegu przy założeniu, że pierwsze miejsce zajmie zawodnik z numerem 3?
5. Do utworzenia kilkuliterowych kodów wykorzystano różne litery ze zbioru $\{A, B, C, I, J, K\}$. Uzasadnij, że kodów sześcioliterowych jest tyle samo co pięcioliterowych.



6. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:
- a) w czterech jednoosobowych pokojach,
 - b) w pięciu jednoosobowych pokojach?
7. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach tak, aby każda szuflada była zajęta (kule i szuflady rozróżniamy)?
- b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach tak, aby tylko jedna szuflada była pusta (kule i szuflady rozróżniamy)?
8. Do windy zatrzymującej się na 7 piętrach wsiadło 6 osób. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:
- a) na innym piętrze,
 - b) na innym piętrze, ale nikt nie wysiada na drugim piętrze?
9. a) Na ile sposobów można ustawić 9 osób w kolejce?
- b) Na ile sposobów można ustawić 4 dziewcząt i 5 chłopców w kolejce, jeśli dziewczęta stoją na początku kolejki?
- c) Na ile sposobów można ustawić 3 dziewcząt i 6 chłopców w kolejce, jeśli dziewczęta stoją na końcu kolejki?

1.3. Wariacje bez powtórzeń

Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?



Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kodów.

Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

DEFINICJA

Każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów n -elementowego zbioru A , gdzie $k \leq n$, nazywamy k -elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru A .

Zauważmy, że każda n -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest permutacją.

Liczbę wariacji bez powtórzeń można obliczyć, odwołując się bezpośrednio do reguły mnożenia lub korzystając z podanego poniżej wzoru.

TWIERDZENIE

Jeśli $k \leq n$, to wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Proszę wykonać zadania

ZADANIA

- Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra zero i cyfry się nie powtarzają?
 - Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry: 1, 3, 5, 7, 9 i żadna cyfra się nie powtarza? Ile jest takich liczb czterocyfrowych?
- Ile jest liczb trzycyfrowych, a ile czterocyfrowych, w których cyfry się nie powtarzają?
- Ile można utworzyć dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry zero?
 - Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?
- W loterii fantowej wzięło udział 100 uczniów i każdy kupił jeden ze stu losów. Wygrane to: I nagroda – rakieta tenisowa, II nagroda – piłka do koszykówki i III nagroda – pluszowy miś. Na ile sposobów uczniowie mogą wylosować nagrody?
- Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:
 - na innym piętrze,
 - na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?



1.4. Wariacje z powtórzeniami

Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

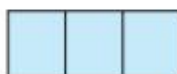
Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ takich liczb.

111	121	211	221	jest 8 liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2
112	122	212	222	

Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry: 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takich liczb.



na każdej z trzech pozycji może wystąpić jedna z pięciu cyfr

DEFINICJA

Każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru A nazywamy k -elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru A .

Uwaga. W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

Ćwiczenie 1

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry: a) 1 i 2, b) 1, 2, 3, 4 i 5?

TWIERDZENIE

Wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest n^k .

W razie problemów proszę obejrzeć film

<https://www.youtube.com/watch?v=uaf1cuMsve0>

i wykonać zadania

ZADANIA

1. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:
a) cyfry 0, b) cyfr 0 i 4, c) cyfr 0, 4 i 5?
2. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 oraz:
a) pierwszą cyfrą jest 2, b) ostatnią cyfrą jest 7?
3. Z urny, w której znajdują się kule z numerami: 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.
4. a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule (kule i szuflady rozróżniamy)?
b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule. Na ile sposobów można rozmieścić te kule (kule i szuflady rozróżniamy)?
5. a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?
b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?
6. Niech m będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na 4 stacjach, a n – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na 5 stacjach. Uzasadnij, że $m - n < 400$.